Е.А. Григорьев

ВВЕДЕНИЕ
В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Практикум часть 2

(по программе бакалавров)

Глава 4
Ряды аналитических функций.

§17. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

17.1. Основные понятия. Непрерывность и интегрируемость суммы ряда

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится к своей сумме $f(z)$ *равномерно на множестве* E, если $\forall\epsilon > 0 \quad \exists N,\ \forall n > N\ \forall z \in E: \quad \left|f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\right| < \epsilon\,.$

Обозначение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \underset{E}{\rightrightarrows} f(z)\,.$

Функциональный ряд сходится *равномерно внутри области* D, если он сходится равномерно на любом компакте $G \subset D$.

Теорема 17.1. *Пусть* $\forall n \quad f_n(z) \in C(E)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \underset{E}{\rightrightarrows} f(z)\,.$ *Тогда* $f(z) \in C(E)\,.$

Теорема 17.2. *Пусть* γ *– кусочно гладкая кривая, принадлежащая некоторой области* D, *и пусть* $\forall n \quad f_n(z) \in C(D)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \underset{D}{\rightrightarrows} f(z)\,.$ *Тогда сумма* $f(z)$ *этого ряда интегрируема на* γ, *причем*

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)\, dz\,.$$

17.2. Теоремы Вейерштрасса

Теорема 17.3 (первая теорема Вейерштрасса). [1] *Пусть* $\forall n \quad f_n(z) \in \mathcal{A}(D)$ *и функциональный ряд (1) равномерно сходится внутри* D. *Тогда*

1) сумма ряда $f(z) \in \mathcal{A}(D)\,;$

2) $\forall k \in \mathbf{N} \qquad \forall z \in D \quad f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)\,.$

Теорема 17.4 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть* D *– ограниченная область,* $\forall n \quad f_n(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ *и ряд (1) равномерно сходится на границе области* ∂D. *Тогда этот ряд равномерно сходится на* $\overline{D}$ *и его сумма* $f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$.

17.3. Вопросы и задачи

[1] Мы приводим сокращенный вариант этой теоремы. Полная формулировка содержит также утверждение о равномерной сходимости внутри D ряда из п. 2)

1. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри области D. Верно ли, что $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится на D?

2. Пусть D – область, $f_n(z) \in C(D)\ \forall n$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится внутри области D. Докажите, что сумма ряда $f(z) \in C(D)$.

3. Докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

4. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ равномерно сходится в интервале $(-1;0)$ действительной оси, в то время, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{z^n}{n}\right|$ в этом интервале сходится, но неравномерно. (Этот пример показывает, что условия признака Вейерштрасса равномерной сходимости не являются необходимыми).

5. Найдите множество сходимости и множество равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nz}$.

6. Покажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nz}{n^2}$ равномерно сходится на вещественной прямой $\mathbf{R}$, но расходится в любой точке $z \notin \mathbf{R}$.

§18. Степенные ряды. Ряд Тейлора

18.1. Множество сходимости степенного ряда

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

называется *степенным рядом.* Числа c_n – это *коэффициенты* степенного ряда.

Теорема 18.1 (Коши-Адамар). *Если* $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, *то*

а) при $l = 0$ ряд (1) абсолютно сходится во всей комплексной плоскости;

б) при $l = \infty$ ряд (1) сходится лишь в точке z_0;

в) при $0 < l < \infty$ ряд (1) абсолютно сходится внутри круга $|z - z_0| < R$, где $R = \dfrac{1}{l}$, и расходится во внешности этого круга, т.е. при $|z - z_0| > R$.

Определение 2. Число R – *радиус сходимости* степенного ряда. По определению: $R = 0$ при $l = \infty$; $R = \infty$ при $l = 0$.

Определение 3. Множество $K_R = \{z : |z - z_0| < R\}$, где $R > 0$ – радиус сходимости, называется *кругом сходимости* степенного ряда.

Формула для вычисления радиуса сходимости

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{2}$$

называется *формулой Коши-Адамара.*

Замечание. Если существует предел $$R' = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \qquad (3)$$ то $R' = R$.

Примеры.

1) Найти радиус сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+i}{(2+i)^n}(z-i)^n$; выяснить, сходится ли данный ряд в точках $z_{1,2} = \pm 3i$, $z_3 = 2$.

$\triangleright$ Используя формулу Коши-Адамара, вычислим радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+i}{(2+i)^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|n+i|}}{|2+i|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

откуда $R = \sqrt{5}$, следовательно, имеем круг сходимости $|z-i| < \sqrt{5}$.

Точка $z_1 = 3i$ лежит внутри круга сходимости, так как $|z_1 - i| = |2i| = 2 < R$, значит в этой точке данный ряд абсолютно сходится.

Напротив, точка $z_2 = -3i$ находится вне круга сходимости, потому что $|z_2 - i| = |-4i| = 4 > R$, следовательно, в этой точке ряд расходится.

Наконец, для $z_3 = 2$ получаем $|z_3 - i| = |2-i| = R$, так что выяснение сходимости ряда производится непосредственными вычислениями. Имеем ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+i}{(2+i)^n}(2-i)^n$, для которого

$$\left| \frac{n+i}{(2+i)^n} \right| |2-i|^n = \frac{|n+i|}{|2+i|^n} |2-i|^n = |n+i| \to \infty$$

при $n \to \infty$. Ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости $\triangleleft$

2) Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ (p – действительное число).

$\triangleright$ Здесь $z_0 = 0$, $c_n = \dfrac{1}{n^p}$. Радиус сходимости найдем по формуле (3):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1$$

при любом p. Поэтому при $|z| < 1$ ряд сходится, при $|z| > 1$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда в точках окружности $|z| = 1$. Так как для общего члена ряда справедлива оценка $\left| \dfrac{z^n}{n^p} \right| = \dfrac{|z|^n}{n^p} = \dfrac{1}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд сходится абсолютно. Если же $p \le 0$, общий член ряда не стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому ряд расходится. Пусть $0 < p \le 1$, $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0;\ 2\pi)$, тогда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^p} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^p}$.

Оба вещественных ряда в правой части последнего ряда сходятся по признаку Дирихле-Абеля, если $\varphi \ne 0$ (докажите!)

При $\varphi = 0$, т.е. в точке $z = 1$, этот ряд расходится, так как первый из рядов в правой части расходится, а второй сходится.

Итак, множество сходимости данного ряда – открытый круг $|z| < 1$ при $p \le 0$; замкнутый круг $|z| \le 1$ при $p > 1$; тот же замкнутый круг за исключением точки $z = 1$ при $0 < p \le 1$ $\triangleleft$

18.2. Равномерная сходимость степенного ряда и ее следствия

Теорема 18.2 (Абель). *Пусть степенной ряд (1) сходится в точке* $z_1 \ne z_0$. *Тогда (1) сходится абсолютно в любой такой точке* z, *что* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, *и сходится равномерно в любом замкнутом круге* $\overline{K_\rho} = \{z : |z - z_0| \le \rho\}$, *где* $0 < \rho < |z_1 - z_0|$.

Используя теорему 18.2 и результаты §17, получаем ряд следствий.

Следствие 1. *Сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости.*

Следствие 2. *Степенной ряд можно почленно интегрировать на любой кусочно гладкой кривой внутри круга сходимости.*

Следствие 3. *Внутри круга сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно любое число раз. При этом получающиеся ряды имеют тот же радиус сходимости, что исходный.*

Следствие 4. *Пусть* $f(z)$ *– сумма ряда (1). Тогда коэффициенты ряда (1) имеют вид*

$$c_0 = f(z_0), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \text{где} \quad n = 1,\ 2, \dots \tag{4}$$

$\triangleright$ Так как $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то $f(z_0) = c_0$. Из равенства

$\displaystyle f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (z - z_0)^{n-1}$ после подстановки $z = z_0$ получаем $c_1 = f'(z_0)$.

В общем случае имеем $\displaystyle f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, c_n (z - z_0)^{n-k}$, откуда $\displaystyle c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ $\triangleleft$

Определение 4. Степенной ряд, коэффициенты которого выражаются формулами (5), называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Таким образом, следствие 4 означает, что всякий степенной ряд с $R > 0$ является рядом Тейлора для своей суммы.

Следствие 5. *Если два степенных ряда в некотором круге* $|z - z_0| < R$ *имеют одну и ту же сумму, их коэффициенты (а значит и сами ряды) совпадают.*

18.3 Теорема Тейлора

Теорема 18.3. *Пусть* $f(z)$ *- аналитическая функция внутри круга* $K_R = \{z : |z - z_0| < R\}$, $R > 0$. *Тогда* $f(z)$ *однозначно представляется сходящимся внутри* K_R *степенным рядом* $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

18.4. Разложение функций в степенные ряды

Основные приемы разложения функций в степенные ряды – те же самые, что были изложены в курсе математического анализа. Отметим некоторые из них.

1) Использование формулы для коэффициентов ряда Тейлора (4). Заметим, в частности, что таким образом получаются известные представления основных элементарных функций, а именно:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,;$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{(2n)!}\,;$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}\, z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n-1}}{(2n-1)!}\,;$$
$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,;$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\,;$$
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,.$$

Первые пять рядов сходятся во всей плоскости, последний ряд имеет радиус сходимости $R = 1$.

2) Использование основных разложений.

3) Применение почленного дифференцирования или интегрирования степенных рядов.

Примеры

a) Найти разложение в ряд по степеням z функции $f(z) = \ln(1+z)$, где $\ln$ обозначает главную однозначную ветвь логарифма.

$\triangleright$ Так как $f(z) \in \mathcal{A}(|z| < 1)$, согласно теореме 18.3 искомое разложение имеет место внутри единичного круга ($z = -1$ – точка особенности). Заметим, что $f'(z) = \dfrac{1}{1+z}$, поэтому

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta} = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n\right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z \zeta^n\, d\zeta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, \zeta^{n+1}\Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, z^{n+1}\,.$$

Итак, для $|z| < 1$ получена формула $\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, z^n$, имеющая вид, уже известный из теории вещественного анализа $\triangleleft$

b) Найти разложение в ряд по степеням $(z-1)$ функции $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2}$.

$\triangleright$ $f(z) \in \mathcal{A}(|z-1| < 3)$, поэтому существует степенной ряд, сходящийся внутри круга радиуса $R = 3$ с центром в точке $z_0 = 1$. Заметив, что $f(z) = \left(-\dfrac{1}{2+z}\right)'$, найдем сначала разложение функции $\dfrac{1}{2+z} = \dfrac{1}{3+(z-1)} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,(z-1)^n\,.$

Тогда

$$f(z) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(n+1)}{3^{n+2}}(z-1)^n\,, \quad |z-1| < 3 \qquad \lhd$$

18.5. Вопросы и задачи

1. Для данного степенного ряда найдите радиус и круг сходимости; выясните, сходится ли этот ряд в указанных точках z_1, z_2, если

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+i}{3^k \cdot k^3}(z-1+i)^k\,; \quad z_1 = -2i\,;\ z_2 = 1+2i\,;$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}\,i^k}{k^2+k-1}(z-i)^k\,; \quad z_1 = -2i\,;\ z_2 = 1+i\,.$

2. Может ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,(z+i)^n$ расходиться в точке $z = -2-i$,

   а ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}(z+i)^n$ – сходиться в точке $z = 1+i$ (в обоих случаях $\{c_n\}$ – одно и то же множество чисел)?

3. Найдите радиус и круг сходимости для каждого из следующих рядов:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,(z+i)^n;$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n^n};$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n};$ *d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\,z^{n!}.$

4. Найдите радиус сходимости и исследуйте поведение на границе круга сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}\,z^n.$

5. Радиус сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,z^n$ равен R $(0 < R < \infty)$. Найдите радиусы сходимости рядов

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k\,c_n\,z^n, \quad k \in \mathbf{Z};$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(z+1)^n;$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n+2i)\,c_n}{n}\,z^n.$

6. Разложите в ряд по степеням z следующие функции; укажите радиусы сходимости:

   a) $\sin^2 z\,;$ *b*) $\operatorname{ch}^2 z\,;$ *c*) $\dfrac{1}{az+b}$ $(b \neq 0);$ *d*) $\dfrac{z}{(z-1)^2};$

   e) $\sqrt{z+2i}$ $(\sqrt{1} = -1);$ *f*) $\dfrac{z}{z^2+5z+4}.$

7. Следующие функции разложите в ряд по степеням $(z-1)$; укажите радиус сходимости полученного ряда:

   a) $e^{\,2iz}\,;$ *b*) $\sin z\,;$ *c*) $\dfrac{z}{z^2+5z+4}.$

8. Функцию $f(z)=\dfrac{z^2+5}{(z^2-4)(2z^2+1)}$ разложите в степенной ряд в окрестности точки $a)$ $z_0=0$; $b)$ $z_0=\infty$.

9. Объясните, почему бесконечно дифференцируемая в окрестности точки $x_0=0$ действительной прямой функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & x\neq 0\,, \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$ не может быть разложена в ряд Маклорена.

10. Что можно сказать о радиусе сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\,z^n$, если радиусы сходимости рядов $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,z^n$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,z^n$ равны R_1 и R_2 соответственно?

11. Можно ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2z-i)^n}{n^3}$ а) почленно интегрировать на кривой $|z|=\dfrac{1}{3}$;
    б) почленно дифференцировать в круге $D=\left\{z:\left|z-\dfrac{i}{3}\right|<\dfrac{1}{5}\right\}$;
    в) дважды почленно дифференцировать в круге D?

12. Докажите, что степенной ряд, полученный почленным дифференцированием некоторого ряда, имеет тот же радиус сходимости $(R>0)$.

13. Найдите сумму степенного ряда: $a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,z^n$.

§19. Единственность определения аналитической функции

19.1. Нули аналитической функции

Определение 1. Точка z_0, где $f(z_0)=0$, называется *нулем функции* $f(z)$.

Пусть $f(z)\in\mathcal{A}(D)$, точка $z_0\in D$ – нуль $f(z)$. Тогда по теореме Тейлора в некоторой окрестности z_0

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n\,, \tag{1}$$

причем $c_0=0$.

Определение 2. Аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 *нуль порядка* k, если в ее разложении (1) $c_0=c_1=\ldots=c_{k-1}=0$, но $c_k\neq 0$.

Утверждение. *Аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка k тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух нижеследующих утверждений:*

$$1)\quad f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0,\quad \textit{но}\quad f^{(k)}(z_0)\neq 0\,;$$

$$2)\quad f(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi(z)\,,\quad \textit{где } \varphi(z) \textit{ аналитична в окрестности } z_0,\ \ \varphi(z_0)\neq 0.$$

Примеры

Определить порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0, если
a) $f(z) = 1 - \cos z\,, \quad z_0 = 2\pi\,; \quad$ *b*) $f(z) = e^{-z^2} - \cos(z\sqrt{2})\,, \quad z_0 = 0.$

$\triangleright$ *a*) $f(2\pi) = f'(2\pi) = 0\,,$ но $f''(2\pi) = 1 \neq 0,$ следовательно, $z_0 = 2\pi$ – нуль второго порядка $f(z)$.

b) В окрестности точки $z_0 = 0$ выпишем первые члены разложения в степенной ряд:

$$f(z) = 1 - z^2 + \frac{1}{2}\,z^4 - 1 + \frac{1}{2}\,(z\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4!}\,(z\sqrt{2})^4 + O(z^6) =$$

$$= \frac{1}{3}\,z^4 + O(z^6) = z^4\,\left(\frac{1}{3} + cz^2 + \ldots\right),$$

значит, $z_0 = 0$ – нуль четвертого порядка данной функции $\triangleleft$

19.2. Основная теорема

Теорема 19.1. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая в области* D *функция,* $f(z) = 0\ \forall z \in D_0 \subset D$, *причем* D_0 *имеет хотя бы одну предельную точку в* D. *Тогда* $f(z) \equiv 0$ *в* D.

Следствие 1. *Пусть* $f(z)$ *– не равная тождественно нулю аналитическая в области* D *функция, а* E *– ограниченная и замкнутая подобласть* D. *Тогда* $f(z)$ *может иметь в* E *лишь конечное число нулей.*

Следствие 2. *Не равная тождественно нулю целая функция* $f(z)$ *может иметь не более чем счетное число нулей в* $\mathbf{C}$, *причем если нулей бесконечно много, то* $z = \infty$ *– предельная точка этого множества нулей.*

19.3. Теорема единственности и ее следствия

Теорема 19.2 (теорема единственности). *Существует не более одной функции, однозначной и аналитической в области* D, *принимающей заданные значения на некотором множестве* D_0, *имеющем хотя бы одну предельную точку в* D.

Примеры

1. Найти все аналитические в $\mathbf{C}$ функции, удовлетворяющие условию
$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots$

$\triangleright$ Данному условию отвечает аналитическая в $\mathbf{C}$ функция $f(z) = z^2$. Множество точек вида $\left\{z_n = \pm\frac{1}{n}\right\}$ имеет предельную точку $z = 0$, поэтому по теореме 19.2 найденная функция единственна $\triangleleft$

2. Существует ли аналитическая в круге $K = \{|z| < 2\}$ функция, для которой
$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots?$

$\triangleright$ Выбрав множество $D_0 = \left\{z_n = \frac{1}{n}\right\}$, имеющее в K предельную точку $z = 0$, можно указать $f \in \mathcal{A}(K)$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Это $f(z) = z$. Но тогда $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$. В силу единственности определения $f(z)$ по значениям на D_0 аналитической в K функции с заданным условием не существует $\triangleleft$

3. Найти такую целую функцию $f(z)$, чтобы $\forall n \in \mathbf{Z}\ \ f(n) = 0.$

$\triangleright$ Множество целых чисел $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ имеет одну предельную точку $z_0 = \infty$. Но $z_0 \notin \mathbf{C}$, поэтому теорема единственности в данном случае не имеет места. И действительно, существует бесконечно много целых функций, удовлетворяющих условию $f(n) = 0$. Это, например, $f(z) = 0$; $f(z) = 2\sin \pi z$; $f(z) = \sin 2\pi z$; $f(z) = \sin^2 \pi z$ и т.д. $\triangleleft$

4. Пусть $D = \mathbf{C}$, $D_0 = \mathbf{R}$ – действительная ось. Рассмотрим на $\mathbf{R}$ функцию $f(x) = \sin x$. По теореме 19.2 существует не более одной аналитической в $\mathbf{C}$ (т.е. целой) функции, совпадающей с $f(x)$ на $\mathbf{R}$. Одна такая функция известна: это $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$. Значит, она единственна и является аналитическим продолжением $\sin x$ во всю комплексную плоскость: $f(z) = \sin z$ $\triangleleft$

5. Теорема единственности позволяет распространять на более широкие множества некоторые соотношения между функциями, известные в частных ситуациях. Так, например, для $x \in \mathbf{R}$ имеет место равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Рассмотрим $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Легко видеть, что $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$ (см. пример 4)), $f(z) = 1$, $z \in \mathbf{R}$. Тогда $\forall z \in \mathbf{C}$ $f(z) = 1$, т.е. $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$ $\triangleleft$

19.4. Вопросы и задачи

1. Найдите порядок нуля z_0 для функции $f(z)$, если
   a) $f(z) = z^2(1 - \cos 2z)$; $z_0 = 0$; *b*) $f(z) = z\sin^3 2z$; $z_0 = 0$, $z_0 = -\pi$; *c*) $f(z) = \dfrac{\sin^3 2z}{z^2}$; $z_0 = 0$, $z_0 = \pi$; *d*) $f(z) = e^{\sin^2 z} - 1$; $z_0 = 0$, $z_0 = 2\pi$; *e*) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(e^z + 1)^2$; $z_0 = \pi i$, $z_0 = 3\pi i$.
2. Пусть точка z_0 – нуль порядка k функции $f(z)$. Чем точка z_0 является для функции $f^{(m)}(z)$ $(m \in \mathbf{N},\ 0 < m < k)$?
3. Пусть точка z_0 – нуль порядка k функции $f(z)$ и одновременно нуль порядка m функции $g(z)$. Чем она является для функций
   a) $f(z) \pm g(z)$; *b*) $f(z) \cdot g(z)$; *c*) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$?
4. Не равная нулю функция $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$, аналитическая в круге $K = \{|z - 1| < 1\}$, имеет в K бесконечное множество нулей. Почему это не противоречит теореме единственности?
5. Докажите, что всякий нуль $z_0 \neq \infty$ не равной нулю тождественно функции $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$ изолирован, т.е. найдется окрестность z_0, в которой нет других нулей $f(z)$.
6. Существует ли $f(z) \in \mathcal{A}\big(\{|z| < 1\}\big)$, для которой выполнены условия $(n \in \mathbf{N})$:
   a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^4}$; *b*) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3}$;
   c) $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right) = 1$; *d*) $f\left(\dfrac{n}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$?
7. Докажите справедливость в $\mathbf{C}$ формул двойного аргумента
   $$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \sin 2z = 2\cos z \sin z,$$
   используя теорему единственности.

Глава 5
Ряды Лорана и классификация особых точек

§20. Ряд Лорана

20.1. Понятие ряда Лорана и свойства его суммы

Функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{1}$$

называется *рядом Лорана.* Числа $c_n \in \mathbf{C}$ – это *коэффициенты* ряда Лорана.

Определение. Пусть $z_0 \neq \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется *правильной частью,* а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – *главной частью* ряда Лорана (1).

Определение. Ряд Лорана сходится в точке z, если в этой точке сходятся его правильная и главная части одновременно.

Теорема 20.1. *Пусть числа R и r определяются равенствами* $R^{-1} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, $0 \le r < R \le +\infty$. *Тогда ряд Лорана (1) абсолютно сходится в кольце* $\mathcal{K}_{r,R} = \{z : r < |z-z_0| < R\}$, *а его сумма* $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{r,R})$.

Замечание. Числа R и r из теоремы 20.1 можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \quad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|$$

(если эти пределы существуют).

20.2. Теорема Лорана

Теорема 20.2 (Лоран). *Пусть $f(z)$ – функция, однозначная и аналитическая в некотором кольце $\mathcal{K}_{r,R} = \{z : r < |z-z_0| < R\}$. Тогда $f(z)$ можно разложить в сходящийся в этом кольце ряд Лорана, причем единственным образом.*

Замечание (случай $z_0 = \infty$). Для разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$ следует сделать преобразование $z = \dfrac{1}{\zeta}$, затем функцию $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ разложить в ряд в окрестности точки $\zeta_0 = 0$ и вернуться к прежней переменной z.

Фактически искомое разложение – это разложение по степеням $\dfrac{1}{z}$. Поэтому правильную часть ряда образуют члены с неположительными степенями z, а главную часть

– с положительными степенями z, т.е. с отрицательными степенями $\dfrac{1}{z}$. При этом ряд Лорана в окрестности $z_0=\infty$ может выглядеть так же, как и в окрестности $z_0=0$, если иных особых точек нет (см. ниже примеры 1$a)-b)$, 3а)–б), 5), либо иначе (см. пример 2б)–в)). В первом случае главная и правильная части ряда меняются местами (за исключением свободного члена, который всегда является принадлежностью правильной части).

20.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана

1. Допускают ли данные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки z_0? (Здесь имеется в виду проколотая окрестность точки z_0, т.е. кольцо с нулевым внутренним радиусом).

$a)\qquad f(z)=\sin\dfrac{1}{z},\qquad z_0=0.$

$\triangleright$ $f(z)$ – аналитическая функция при $z\neq 0$, следовательно, по теореме 20.2 разложение существует. Его можно получить, используя известное разложение $\sin z$ в степенной ряд, сходящийся во всей плоскости:

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{1}{z^{2n-1}}\,,\quad 0<|z|<\infty\,. \tag{2}$$

Все члены (2) принадлежат главной части ряда Лорана $\triangleleft$

$b)\qquad f(z)=\sin\dfrac{1}{z},\qquad z_0=\infty.$

$\triangleright$ Разложение возможно. Обоснование то же, что в примере $a)$, только множество $0<|z|<\infty$ рассматривается как окрестность точки $z_0=\infty$. Ряд Лорана имеет тот же вид (2), однако это разложение следует воспринимать как ряд по степеням $\dfrac{1}{z}$, поэтому все его члены принадлежат правильной части ряда $\triangleleft$

$c)\qquad f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z+1}},\qquad z_0=-1.$

$\triangleright$ Данная функция не аналитична в точках, где $\sin\dfrac{1}{z+1}=0$, т.е. при $z_n=-1+\dfrac{1}{\pi n}$, $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$. Поскольку $z_n\to -1$ при $n\to\infty$, то не существует проколотой окрестности точки $z_0=-1$, где $f(z)$ аналитична. Поэтому разложение в ряд Лорана при указанном условии невозможно $\triangleleft$

$d)\qquad f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}\,,\qquad z_0=0.$

$\triangleright$ В точках, где $\cos\dfrac{1}{z}=0$, функция теряет аналитичность. Эти точки $z_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\pi n}$, $n\in\mathbf{Z}$, образуют последовательность, сходящуюся к $z_0=0$. Разложение невозможно по той же причине, что и в п. $c)$ $\triangleleft$

$e)\qquad f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}\,,\qquad z_0=\infty.$

▷ В предыдущем примере найдены корни уравнения $\cos\dfrac{1}{z} = 0$. Нетрудно видеть, что $|z_n| \le \dfrac{2}{\pi}$, поэтому $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$. Значит, разложение в ряд Лорана возможно.

Заметим, что исходная постановка $e)$ равносильна вопросу о разложимости функции $\operatorname{tg}\zeta$ в ряд в окрестности точки $\zeta = 0$ ◁

$f)$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{e^z + 2}, \quad z_0 = \infty.$

▷ Нули знаменателя имеют вид $z_n = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i\ \mathrm{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi\,(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Поскольку $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то не существует проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$, где $f(z)$ аналитична. Поэтому разложение в ряд Лорана невозможно ◁

$g)$ $\quad f(z) = \mathrm{Ln}\, z, \quad z_0 = 0.$

▷ Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ невозможно, так как $f(z)$ неоднозначна ◁

$h)$ $\quad f(z) = \ln z, \quad z_0 = 0.$

▷ Не существует проколотой окрестности точки $z_0 = 0$, где данная функция была бы непрерывной. Действительно, например, при условии $\arg z \in [0,\ 2\pi)$ действительная положительная полуось является линией разрывов. Тем более функция $f(z) = \ln z$ не является аналитической в окрестности точки $z_0 = 0$, поэтому здесь невозможно разложение $f(z)$ в ряд Лорана ◁

2. Разложить в ряд Лорана $\quad f(z) = \dfrac{z^2 + 2z - 3}{(z-2)(z^2+1)}$

а) в кольце $1 < |z| < 2$; б) в окрестности точки $z_0 = 0$; в) в окрестности точки $z_0 = \infty$.

▷ Представим $f(z)$ в виде суммы дробей $\quad f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{2}{z^2+1}$.

Ниже для получения разложений будем пользоваться формулой $\quad \dfrac{1}{1-q} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$.

а) Так как $|z| > 1$ и $|z| < 2$, то

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, \quad \left(\text{здесь } \left|\frac{z}{2}\right| < 1,\ \text{т.е. } |z| < 2\,\right) \tag{3}$$

и

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}, \quad \left(\text{здесь } \left|\frac{1}{z^2}\right| < 1,\ \text{т.е. } |z| > 1\,\right). \tag{4}$$

Итак,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

б) Для требуемого разложения следует взять ряд (3), а вместо (4)

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n},$$

где $|z^2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1$. Таким образом,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1. \tag{5}$$

Заметим, что полученное разложение имеет место не в кольце $0 < |z| < 1$, а внутри круга $|z| < 1$, так как $f(z)$ здесь аналитична. При этом (5) является рядом Тейлора функции $f(z)$ (частный случай ряда Лорана, когда главная часть отсутствует).

в) В этом случае, очевидно, $|z| > 2$ и для получения искомого разложения следует взять (4), а первое слагаемое представить в виде

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1.$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n-1}}{z^{2n}}, \quad |z| > 2,$$

– разложение в ряд Лорана в окрестности $z_0 = \infty$. В этом разложении также отсутствует главная часть (есть лишь положительные степени $\frac{1}{z}$) $\lhd$

3. Разложить в ряд Лорана $\quad f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$
а) в окрестности точки $z_0 = 0$; $\quad$ б) в окрестности точки $z_0 = \infty$.

$\rhd$ Используя известное разложение e^z, получаем

$$f(z) = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^{n+2}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\,\frac{1}{z^n}. \tag{6}$$

Так как (6) верно при $0 < |z| < +\infty$, этот ряд дает решение и в случае а), и в случае б). В окрестности $z_0 = 0$ правильная часть ряда Лорана состоит из первых трех слагаемых (6), а главная часть содержит бесконечное число членов. Напротив, разложение в окрестности $z_0 = \infty$ имеет главную часть, состоящую лишь из двух первых слагаемых, а все остальные принадлежат правильной части $\lhd$

4. Разложить в ряд Лорана $\quad f(z) = \cos\dfrac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} \quad$ в окрестности точки $z_0 = 2$.

$\rhd$

$$f(z) = \cos\frac{(z^2 - 4z + 4) - 4}{(z-2)^2} = \cos\left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right) =$$

$$= \cos 1 \cdot \cos\frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1 \cdot \sin\frac{4}{(z-2)^2} =$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,4^{2n}}{(2n)!}\,\frac{1}{(z-2)^{4n}} + \sin 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,4^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{1}{(z-2)^{2n}},$$

где $0 < |z-2| < +\infty \quad \lhd$

5. Разложить в ряд Лорана $\quad f(z) = e^{z + \frac{1}{z}} \quad$ в области $0 < |z| < +\infty$.

$\triangleright$

$$f(z)=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{m-n}}{m!\,n!}$$

(перестановка членов возможна, поскольку оба ряда сходятся абсолютно). Фиксируем $k\in\mathbf{Z}$. Если $m-n=k\geq 0$, т.е. $m=n+k$, то при каждом n во внутренней сумме остается лишь слагаемое с $m=n+k$. Тогда коэффициент при z^k равен $c_k=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,(n+k)!}$, $\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$

Аналогично при $m-n=-k>0$, т.е. $m=n+k$, получаем $\quad c_k=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,(n-k)!}$, $k=-1,\ -2,\ldots$

Итак, искомое разложение имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,z^k$ с коэффициентами, указанными выше $\triangleleft$

20.4. Вопросы и задачи

1. Найдите области сходимости следующих рядов:

   a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+i}(z+2i)^n$; $\qquad$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{e^{|n|}}z^n$; $\qquad$ *c)* $\displaystyle\frac{2i-1}{(z+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(z+1)^n$;

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}(z-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{4^n}\frac{1}{(z-i)^n}$.

2. Выясните, допускает ли функция $f(z)$ разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0, если

   a) $f(z)=\operatorname{th}z$, $\quad z_0=0$; $z_0=\infty$; $\qquad$ *b)* $f(z)=\left(\cos\dfrac{1}{z}\right)^{-1}$, $\quad z_0=0$; $z_0=\infty$;

   c) $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos^2 z}$, $z_0=0$; $z_0=1$; $z_0=\infty$; $\quad$ *d)* $f(z)=\dfrac{z}{\cos^2 z+3}$, $z_0=0$; $z_0=\infty$;

   d) $f(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+3}$, $z_0=1$; $z_0=\infty$; $\quad$ *e)* $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z+3}$, $z_0=0$; $z_0=-3$; $z_0=\infty$.

3. Разложите $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности z_0, если

   a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+5z+4}$, $\quad z_0=-4$; $\qquad$ *b)* $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, $\quad z_0=1$; $\qquad$ *c)* $f(z)=e^{\frac{z}{z+2}}$, $z_0=-2$;

   d) $f(z)=\sin\dfrac{z+1}{z-2}$, $\quad z_0=2$; $\qquad$ *e)* $f(z)=\sqrt{z+2i}$, $\quad z_0=0$, $\quad(\sqrt{1}=-1)$.

4. Функцию $f(z)$ разложите в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ в области, содержащей точку z^*, если

   a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z-4}$, $\quad z_0=-1$, $\ z^*=2i$;

   b) $f(z)=\dfrac{z^2+5}{(z^2-4)(2z^2+1)}$, $\quad z_0=0$, $\ z^*=-1$;

   c) $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$, $\quad z_0=-1$, $\quad z^*=2$.

5. Докажите, что если функция $f(z)$ четная и аналитическая в кольце $0<|z|<R$, то ее ряд Лорана $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n\, z^n$ имеет коэффициенты $c_{2n+1}=0$.

6. Функция $f(z)$ аналитична в кольце $r<|z-z_0|<R$. Для $\rho\in(r,R)$ обозначим $M(\rho)=\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$. Докажите, что для коэффициентов ряда Лорана $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ справедлива оценка $|c_n|\le\dfrac{M(\rho)}{\rho^n}$.

7. Докажите, что если для целой функции $f(z)$ имеет место оценка $|f(z)|\le M\,|z|^k$ $\forall z\in\mathbf{C}$, где $k\in\mathbf{N}$, $M>0$ – некоторая постоянная, то $f(z)$ – полином степени не выше k (обобщение теоремы Лиувилля).

§21. Изолированные особые точки однозначной функции

21.1. Основные понятия

Пусть $f(z)$ – функция, однозначная и аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0, т.е. в кольце $\mathcal{K}\equiv\mathcal{K}_{0,R}=\{z:\ 0<|z-z_0|<R\}$, если $z_0\ne\infty$, или на множестве $\mathcal{K}\equiv\mathcal{K}_\infty=\{z:\ B<|z|<+\infty\}$ при некотором $B>0$, если $z_0=\infty$.

Определение. Если $f\in\mathcal{A}(z_0)$, то точка z_0 называется *правильной (регулярной)* точкой этой функции. В противном случае z_0 – *особая* точка (или: *изолированная особая* точка) функции $f(z)$.

Согласно теореме Лорана в $\mathcal{K}$ имеет место равенство
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\,. \qquad (1)$$
(Если $z_0=\infty$, то (1) – это ряд по степеням z, сходящийся в области $\mathcal{K}_\infty$).

Пусть z_0 – особая точка функции $f(z)$.

Определения.

Точка z_0 – *устранимая* точка $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (1) равна нулю.

Точка z_0 – *полюс* функции $f(z)$, если главная часть ряда (1) содержит конечное число членов.

Точка z_0 – *полюс порядка* k $(k\in\mathbf{N})$ функции $f(z)$, если k – максимальная по модулю степень у ненулевого члена главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки z_0. В частности, для $z_0\ne\infty$ ряд (1) имеет коэффициент $c_{-k}\ne0$, в то время как $c_{-n}=0\quad\forall n>k$.

Полюс первого порядка называется также *простым* полюсом.

Точка z_0 – *существенно особая точка* $f(z)$ (с.о.т.), если главная часть ряда (1) содержит бесконечное число членов.

21.2. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

Пусть $f(z)$ – функция, однозначная и аналитическая в некоторой проколотой окрестности $\mathcal{K}$ особой точки z_0.

Теорема 21.1. *Точка z_0 – устранимая особенность $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 21.1***.** *Точка* z_0 *– устранимая особенность* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда существует конечный предел* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема 21.2. *Для того, чтобы точка* z_0 *была полюсом функции* $f(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема 21.3. *Точка* z_0 *– полюс порядка* k *функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда в* $\mathcal{K}$ *справедливо представление* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, *где* $\varphi(z) \in \mathcal{A}(z_0)$, $\varphi(z_0) \neq 0$.

Следствие. *Для того, чтобы в точке* z_0 *был полюс порядка* k *функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}\,, & z \neq z_0\,, \\ 0\,, & z = z_0 \end{cases}$ *имела в этой точке нуль порядка* k.

Теорема 21.4. *Изолированная особая точка* z_0 *функции* $f(z)$ *является существенно особой тогда и только тогда, когда не существует* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

21.3. Примеры

1. Рассмотрим функцию, которая является суммой сходящегося ряда:

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{3} + \cdots \frac{z^k}{3^k} + \cdots$$

Что можно сказать о характере точки $z_0 = 0$?

$\triangleright$ Вывод о том, что $z_0 = 0$ – существенно особая точка $f(z)$, так как главная часть ряда Лорана по степеням z содержит бесконечное число членов, неверен. Дело в том, данный ряд сходится в кольце $1 < |z| < 3$, а классификация особых точек проводится на основе лорановского разложения *в проколотой окрестности* z_0.

В нашем случае легко можно суммировать ряды из правильной и главной частей соответственно:

$$1 + \frac{z}{3} + \cdots \frac{z^k}{3^k} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{3}{3-z}\,, \quad |z| < 3\,;$$

$$\frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{z^n} + \cdots = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}\,, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1\,,\ \text{т.е. } |z| > 1\,,$$

так что $f(z) = \dfrac{3}{3-z} + \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{2z}{(z-1)(3-z)}$ и, очевидно, $z_0 = 0$ – правильная точка $f(z)$ $\triangleleft$

2. В примерах п. 20.3 установить характер особой точки z_0 функции $f(z)$, используя вид разложения в ряд Лорана в проколотой окрестности этой точки:

$\triangleright$ 1 a) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$. Точка $z_0 = 0$ – существенно особая, поскольку главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов.

1 b) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$, $z_0 = \infty$.

В этой точке устранимая особенность, так как все члены ряда принадлежат его правильной части.

$1\,c)\qquad f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z+1}},\qquad z_0=-1.$

Точки $\quad z_n=-1+\dfrac{1}{\pi n},\quad n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0,\quad$ являются особыми (простыми полюсами). Поскольку $z_n\to -1$ при $n\to\infty$, то $z_0=-1$ является неизолированной особой точкой. Разложение в ряд Лорана в ее окрестности невозможно, эта точка не классифицируется по схеме п. 21.1.

$1\,d)\qquad f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}.\quad$ Точка $z_0=0$ – неизолированная особенность $f(z)$ (точка, предельная для последовательности простых полюсов $\quad z_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\pi n},\quad n\in\mathbf{Z}$).

$1\,e)\qquad f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z},\qquad z_0=\infty.$

В этой точке $f(z)$ имеет устранимую особенность. Действительно, в результате замены $z=\dfrac{1}{\zeta}$ получаем функцию $\operatorname{tg}\zeta$, которая может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $\zeta=0$.

$1\,f)\qquad f(z)=\dfrac{1}{e^z+2}.\quad$ Точка $z_0=\infty$ является неизолированной, так как нули знаменателя $\quad z_n=\ln 2+i\pi\,(2n+1),\quad n\in\mathbf{Z},\ $ образуют последовательность $z_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

$1\,g)\qquad f(z)=\operatorname{Ln} z,\qquad z_0=0.$

Эта точка (наряду с $z=\infty$) – точка ветвления. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в ее окрестности невозможно ($f(z)$ неоднозначна), поэтому $z_0=0$ не классифицируется в рамках п. 21.1.

$3a),\,b)$ Рассматривая разложение в ряд Лорана $\quad f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}\quad$ (формула (6) §20), приходим к заключению, что $z_0=0$ – существенно особая точка, а $z_0=\infty$ – полюс второго порядка функции $f(z)$ $\quad\lhd$

Замечания. 1) Из вида степенного разложения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ (см. п. 18.4) следует, что каждая из них имеет существенную особенность в точке $z=\infty$.

2) Обычно более удобно для исследования особых точек использовать систему равносильных определениям утверждений п. 21.2.

3. Исследовать характер особых точек данных функций (включая $z=\infty$).

$a)\ f(z)=e^{z\,\operatorname{ctg} z};\qquad b)\ f(z)=\dfrac{z\,e^{\frac{1}{1-z}}}{\cos z-1};\qquad c)\ f(z)=\dfrac{z^6\,\sin\dfrac{1}{z}}{(z^2+1)^2}.$

$\rhd\quad a)\quad$ Показатель экспоненты – функция $\quad g(z)=\dfrac{z\cos z}{\sin z}\quad$ имеет особенности в точках $z_n=\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$, и $z=\infty$.

Так как $\quad\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin z}=1$, то $z=0$ – устранимая особая точка $g(z)$. Такой же она является и для $f(z)$.

В точках $z_n=\pi n,\ n\neq 0$, знаменатель $g(z)$ обращается в нуль, а числитель принимает значения, отличные от нуля, значит, $\displaystyle\lim_{z\to z_n} g(z)=\infty$. Отсюда и из замечания 1) следует, что каждая из этих точек – существенно особая для $f(z)$.

Наконец, $z=\infty$ – неизолированная особая точка $f(z)$.

$b)$ Особыми точками $f(z)$ являются $z=1$, $z_n=2\pi n$, $z=\infty$. Последняя из них, очевидно, неизолированная особенность.

В точке $z=1$ – существенная особенность, поскольку не существует предела $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $z\to 1$, а остальные множители в этой точке имеют конечные (ненулевые) значения.

При $z\to 0$ имеем $\quad f(z)\sim \dfrac{ez}{-\frac{z^2}{2}}=-\dfrac{2e}{z}$, так что $z=0$ – простой полюс.

И, наконец, если $z_n=2\pi n$, $n\neq 0$, то в нуль обращается лишь знаменатель всей дроби $\varphi(z)=\cos z-1$. Поскольку $\varphi(z_n)=\varphi'(z_n)=0$, но $\varphi''(z_n)=-\cos z_n=-1\neq 0$, то z_n – нуль второго порядка $\varphi(z)$, следовательно, полюс второго порядка $f(z)$.

$c)$ Особыми точками $f(z)$ являются $z=0$, $z=\pm i$, $z=\infty$.

Нетрудно видеть, что $z=i$ – нуль второго порядка знаменателя дроби, причем все остальные множители в этой точке принимают конечные ненулевые значения. Таким образом, $z=i$ (равно как и $z=-i$) – полюс второго порядка $f(z)$.

В окрестности точки $z=0$ числитель $f(z)$ имеет лорановское разложение

$$z^6\sin\frac{1}{z}=z^6\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\dots\right)=z^5-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z-\frac{1}{7!}\frac{1}{z}+\dots,$$

где бесконечно много слагаемых в главной части. А так как знаменатель $f(z)$ – аналитическая, отличная от нуля при $|z|<1$ функция, то $z=0$ – с.о.т. $f(z)$.

Для исследования характера точки $z=\infty$ совершим замену $z=\dfrac{1}{\zeta}$ и перейдем к рассмотрению в окрестности точки $\zeta=0$ функции $\quad f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=\dfrac{\sin\zeta}{\zeta^2(\zeta^2+1)^2}\sim\dfrac{1}{\zeta}$. Очевидно, она имеет в нуле простой полюс. Точно ту же особенность имеет в бесконечности функция $f(z)$ $\quad\triangleleft$

21.4. Вопросы и задачи

1. Найдите особые точки (включая $z=\infty$) функции $f(z)$ и определите их характер, если

   $a)$ $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot e^{z+\frac{1}{z-1}}$; $\qquad b)$ $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-\pi^2}$;

   $c)$ $f(z)=e^{\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}}$; $\qquad d)$ $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$;

   $e)$ $f(z)=\dfrac{z}{(e^z+2)^2(z^2+4)}$; $\qquad f)$ $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z-1}{z\cdot(z^2+9)^2}$.

2. Известно, что для функции $f(z)$ не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный). Следует ли отсюда, что z_0 – существенно особая точка $f(z)$?

3. Определите характер точки z_0 для функции $f'(z)$, если функция $f(z)$, аналитическая в $\mathcal{K}=\{0<|z-z_0|<R\}$, имеет в точке z_0 :

   $a)$ устранимую особенность; $\quad b)$ полюс порядка k; $\quad c)$ с.о.т.

4. Функция $g(z)$ имеет в точке z_0 устранимую особенность. Определите характер этой точки для функции $f(z)$, если

   $a)$ $f(z) = (g(z))^2$; $b)$ $f(z) = \sin(g(z))$; $c)$ $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$.

5. Функция $g(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс. Определите характер этой точки для функции $f(z)$, если

   $a)$ $f(z) = (g(z))^3$; $b)$ $f(z) = e^{g(z)}$; $c)$ $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$.

6. Функция $f(z)$ имеет в точке z_0 одну из следующих особенностей: а) устранимую; б) полюс; в) существенную особенность. Функция $g(z)$ также имеет в точке z_0 особенность вида а), б) или в). Определите характер точки z_0 для функций $a)$ $f(z) + g(z)$; $b)$ $f(z) \cdot g(z)$.

7. Докажите, что если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ устранимую особенность, то $f(z)$ – постоянная.

8. Докажите, что если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс, то $f(z)$ – полином.

Глава 6
Теория вычетов и ее применение

§22. Вычеты и их вычисление

22.1. Понятие вычета

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, аналитическая в некоторой проколотой окрестности $\mathcal{K}$ точки z_0.

Определение. *Вычетом* $f(z)$ относительно z_0 называется число

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz\,, \tag{1}$$

где $z_0 \in int\,\gamma$, $\gamma \subset \mathcal{K}$, замкнутый контур γ положительно ориентирован относительно области, содержащей точку z_0.

Теорема 22.1. *1) Если $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\dfrac{1}{z-z_0}$ лорановского разложения $f(z)$ в $\mathcal{K} = \{0 < |z - z_0| < R\}$;*

2) если $z_0 = \infty$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ разложения в ряд Лорана $f(z)$ в $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_\infty = \{B < |z| < +\infty\}$.

Замечание. Определение вычета применимо и по отношению к правильной или устранимой особой точке z_0. При этом в случае $z_0 \neq \infty$ *обязательно* $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

Если же $z_0 = \infty$, то *может быть* $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) \neq 0$, поскольку здесь c_{-1} – коэффициент из правильной части лорановского разложения.

22.2. Способы вычисления вычетов

Утверждение 1. *Пусть $z_0 \neq \infty$ – простой полюс $f(z)$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left(f(z)\,(z-z_0)\right). \tag{2}$$

Утверждение 2. *Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z), \psi(z) \in \mathcal{A}(z_0)$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\,. \tag{3}$$

Утверждение 3. *Пусть $z_0 \neq \infty$ – полюс порядка k функции $f(z)$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left(f(z)\,(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}. \tag{4}$$

Замечания. 1) Если z_0 – существенно особая точка $f(z)$, то для вычисления вычета следует либо непосредственно находить коэффициент c_{-1} ряда Лорана, либо использовать теорему о полной сумме вычетов (см. ниже).

2) Для нахождения вычета в бесконечно удаленной точке можно применять те же приемы. Полезно также иметь в виду следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть точка $z_0 = \infty$ – нуль порядка $k \geq 2$ функции $f(z)$. Тогда* $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

22.3. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 22.2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\mathbf{C}$ за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots z_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0\,. \tag{5}$$

Замечание. В формуле (5) вычет в $z_0 = \infty$ участвует всегда, независимо от того, имеет ли $f(z)$ особенность в этой точке.

22.4. Примеры

1) Найти вычеты $f(z)$ во всех конечных изолированных особых точках и в точке $z = \infty$:

$a)\quad f(z) = \dfrac{1}{z}\,;\qquad b)\quad f(z) = z^2 + 3iz - 7\,;\qquad c)\quad f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\,;$

$d)\quad f(z) = \operatorname{tg} z\,;\qquad e)\quad f(z) = \dfrac{i}{z^4}\sin z\,;\qquad f)\quad f(z) = \dfrac{e^z}{z\,(z+1)^3}\,;$

$g)\quad f(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{e^z+2}\,;\qquad h)\quad f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}\,;\qquad i)\quad f(z) = \sin\left(z\,e^{z^2}\right)\cdot\sin\dfrac{1}{z}\,.$

$\triangleright$ $a)$ Особые точки данной функции: $z_0 = 0$ – простой полюс и $z = \infty$ – устранимая особая точка (после доопределения по непрерывности – это нуль первого порядка). Вид $f(z)$ совпадает с ее рядом Лорана по степеням z, он состоит из одного ненулевого члена. Поэтому $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1\,;\quad \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1\,.$

$b)$ Точка $z = \infty$ – полюс второго порядка $f(z)$. Многочлен по степеням z, совпадающий с его лорановским разложением в окрестности бесконечно удаленной точки, не содержит слагаемого вида $\dfrac{1}{z}$, так что $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0\,.$

$c)$ Точки $z = \pm 2i$ – полюсы второго порядка $f(z)$, поэтому для вычисления вычетов используем формулу (4):

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)' = \frac{-2}{(z+2i)^3}\Big|_{z=2i} = -\frac{i}{32}\,.$$

Аналогично для $z = -2i$ получаем $\operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = \dfrac{i}{32}\,.$

Точка $z = \infty$ – устранимая особенность, после доопределения по непрерывности – это нуль 4-го порядка. (Порядок нуля следует из вида функции $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right) = \dfrac{\zeta^4}{(1+4\zeta^2)^2}$ в окрестности $\zeta = 0$.) В соответствии с утверждением 4, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0\,.$

$d)$ Функция имеет простые полюсы в каждой из точек $z_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\,,\ \ k \in \mathbf{Z}$. Воспользовавшись формулой (3), находим

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \operatorname{tg} z = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1\,.$$

Точка $z = \infty$ является неизолированной особой точкой $f(z)$, поэтому понятие вычета для нее не имеет смысла.

$e)$ Особые точки: $z = 0$ – полюс 3-го порядка и $z = \infty$ – с.о.т. В области $0 < |z| < +\infty$, справедливо разложение $f(z)$ в ряд по степеням z:

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{5!} - \ldots,$$

следовательно, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\dfrac{1}{6}$; $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{1}{6}$.

$f)$ Особые точки функции: $z = 0$ – простой полюс, $z = -1$ – полюс 3-го порядка и $z = \infty$ – с.о.т.

По формуле (2) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3}\Big|_{z=0} = 1\,.$

Согласно формуле (4)

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left((z+1)^3 f(z)\right)'' = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\Big|_{z=-1} = \frac{1}{2}\,\frac{e^z}{z^3}\,(z^2-2z+2)\Big|_{z=-1} = -\frac{5}{2e}\,.$$

Вычет в точке $z = \infty$ вычисляем по формуле (5): $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \dfrac{5}{2e} - 1\,.$

$g)$ Особыми точками $f(z)$ являются простые полюсы $z_k = \operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + i\pi\,(1+2k)$, $k \in \mathbf{Z}$; $z = \infty$ – неизолированная особая точка.

В соответствии с формулой (3) при любом k

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{e^{2z}-1}{(e^z+2)'}\Big|_{z=z_k} = \frac{e^{2z_k}-1}{e^{z_k}} = \frac{(-2)^2-1}{-2} = -\frac{3}{2}\,.$$

$h)$ Функция имеет две существенно особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Для вычисления вычетов рассмотрим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в области $0 < |z| < +\infty$ как произведение рядов для e^z и $e^{\frac{1}{z}}$:

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{1}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,k!}\,z^{n-k}\,.$$

При $n-k = -1$, т.е. $k = n+1$, получаем выражение искомого вычета как коэффициента $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}\,z^{n-k}\,.$ Вычет $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

$i)$ Эта функция также имеет две существенные особенности: $z = 0$ и $z = \infty$. Поскольку $f(z)$ – четная функция, ее разложение в ряд Лорана содержит только четные степени z, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = c_{-1} = 0 \qquad \lhd$$

2) Найти вычеты каждой из однозначных ветвей функции $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ относительно точки $z_0 = 1$.

$\triangleright$ $F(z)$ имеет две однозначные ветви, соответствующие двум различным значениям квадратного корня: $f_1(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ и $f_2(z) = \dfrac{1}{-\sqrt{2-z}+1}$ (здесь через $\sqrt{a}$ обозначено главное значение квадратного корня из числа a).

Поскольку $f_1(1) = \dfrac{1}{2}$, точка $z_0 = 1$ является для этой ветви правильной, значит, $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f_1(z) = 0$.

Для второй ветви получаем $f_2(z) = \dfrac{\sqrt{2-z}+1}{z-1}$, откуда следует, что точка $z_0 = 1$ – простой полюс. Тогда по формуле (2) имеем $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f_2(z) = 2$ $\triangleleft$

3) Найти главную часть ряда Лорана функции $f(z) = \dfrac{z\cos 2z}{(z+2)^2}$ в окрестности точки $z_0 = -2$.

$\triangleright$ Точка $z_0 = -2$ – полюс второго порядка $f(z)$, поэтому главная часть ряда Лорана имеет вид

$$\frac{c_{-2}}{(z+2)^2} + \frac{c_{-1}}{z+2}\,.$$

Очевидно,

$$c_{-2} = \lim_{z\to-2} f(z)\,(z+2)^2 = -2\cos 4\,,$$

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = (z\cos 2z)'\Big|_{z=-2} = \cos 4 - 4\sin 4 \qquad \triangleleft$$

22.5. Вопросы и задачи

1. Может ли вычет в устранимой особой точке быть отличным от нуля?
2. Может ли вычет в простом полюсе быть равным нулю?
3. Разложение функции $f(z)$ при $z \in \{0 < |z| < R\}$ имеет вид

$$f(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$$

   Найдите $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f^2(z)$.

4. Докажите, что если $f(z)$ – четная функция, то $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$ (если эти вычеты существует).
5. Пусть $z = \infty$ - изолированная особая точка функции $f(z)$. Верно ли равенство

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{\zeta=0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)?$$

6. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$. Докажите, что тогда $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z\,(f(\infty) - f(z))$.

7. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках (включая $z_0=\infty$), если

   a) $f(z)=\dfrac{2z^3}{z^4+i}$; *b*) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^2}$; *c*) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;

   d) $f(z)=\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1-z}$; *e*) $f(z)=\dfrac{1}{z^6}\operatorname{sh}^2 z+z\sin\dfrac{2}{z}$; *f*) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^5}$.

8. Применяя различные методы, найдите вычет относительно точки $z_0=\infty$ функции $f(z)$, если

   a) $f(z)=\dfrac{1+z^8}{z^6\cdot(z+2)}$; *b*) $f(z)=\dfrac{2z^6+i}{(z^2+4)(z^3-2i)}$;

   c) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$; *d*) $f(z)=\dfrac{\cos^2\pi z}{1+\frac{1}{z}}$;

   e) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2+1}$; *f*) $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-1}$.

9. Найдите $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, $(z_0\neq\infty)$, если

   a) z_0 – нуль порядка n функции $f(z)\in\mathcal{A}(z_0)$;

   b) z_0 – полюс порядка k функции $f(z)$.

10. Найдите главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0, если

    a) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0=-1$; *b*) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$;

    c) $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2(z-1)}$, $z_0=1$ *d*) $f(z)=\dfrac{e^z+1}{(z^2-4)^2}$, $z_0=2$.

§23. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов

23.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 23.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1,z_2,\dots z_n\in D$. Тогда*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z)\,, \tag{1}$$

где ∂D – полная положительно ориентированная граница D.

Замечание. Область D может быть неодносвязной.

Обычно используется другая редакция этого утверждения:

Теорема 23.1*. *Пусть γ – замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, причем $f(z)$ аналитична внутри γ за исключением особых точек $z_1,z_2,\dots z_n$. Тогда*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z)\,. \tag{2}$$

23.2. Примеры

Вычислить контурный интеграл $\quad I = \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,, \qquad$ если

$a)\quad f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3+1}\,, \quad \gamma:\ |z+1| = 1\,;$

$b)\quad f(z) = \cos z\cdot\cos\dfrac{1}{z}\,, \quad \gamma$ – контур прямоугольника с вершинами в точках $\pm1,\ \pm i\,;$

$c)\quad f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-1)\,\left(z-\frac12\right)^2\ldots\left(z-\frac{1}{100}\right)^{100}}\,, \quad \gamma:\ |z| = \dfrac34\,;$

$d)\quad f(z) = \dfrac{1}{\bar z}\,, \quad \gamma:\ |z| = 1\,.$

$\triangleright$ $a)$ Функция $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3+1}$ имеет в конечной части комплексной плоскости три простых полюса $z = \sqrt[3]{-1}$, лишь один из которых $z=-1\in int\,\gamma$. Поэтому по теореме 23.1*

$$I = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i\,\frac{\cos z}{3z^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{2\pi i}{3}\cos 1\,.$$

$b)$ Функция $f(z) = \cos z{\cdot}\cos\dfrac{1}{z}$ имеет внутри контура γ единственную особенность $z=0$, которая является существенно особой точкой. Для нахождения вычета в этой точке следует рассмотреть разложение $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=0$. Поскольку в разложениях в ряд по степеням z функций $\cos z$ и $\cos\dfrac{1}{z}$ присутствуют только четные степени z, то ряд Лорана $f(z)$ также содержит лишь четные степени z, так что $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = 0$. Итак, согласно (2)

$$I = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0\,.$$

$c)\quad f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-1)\,\left(z-\frac12\right)^2\ldots\left(z-\frac{1}{100}\right)^{100}}$ имеет внутри контура $\gamma:\ |z| = \dfrac34$ полюсы $z=0,\ z=\dfrac12,\ \ldots z=\dfrac{1}{100}$, в то время как простой полюс $z=1\in ext\,\gamma$. Согласно теореме 22.2

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \sum_{k=2}^{n}\operatorname*{res}_{z_k=\frac1k} f(z) = -\Big(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\Big)\,.$$

Так как при $z\to\infty$ справедливо соотношение $f(z)\sim\dfrac{1}{z^{1+1+2+\cdots+100}}$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$ (см. утверждение 4 п. 22.2).

Вычислив

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{z\,\left(z-\frac12\right)^2\ldots\left(z-\frac{1}{100}\right)^{100}}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac12\right)^2\ldots\left(\frac{99}{100}\right)^{100}} =$$

$$= \frac{2^2\cdot3^3\ldots100^{100}}{1^2\cdot2^3\ldots99^{100}} = \frac{100^{100}}{99!}\,,$$

получаем,

$$I = -2\pi i \cdot \left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right) = -2\pi i \, \frac{100^{100}}{99!} \, .$$

d) В этом случае функция $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$ не является аналитической, поэтому теорема 23.1 неприменима. Интеграл вычисляется непосредственно:

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{\bar{z}} \, dz = \left\{ z = e^{i\varphi} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-i\varphi}} \cdot i \, e^{i\varphi} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} \cdot i \, d\varphi = 0 \qquad \triangleleft$$

23.3. Собственные интегралы вида $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \ \sin\varphi) \, d\varphi$

Для вычисления интеграла такого типа, где $R(\cos\varphi, \ \sin\varphi)$ – рациональная функция, производится замена $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; \ 2\pi]$. Используя формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) , \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) ,$$

получаем интеграл некоторой рациональной функции $R_1(z)$ по единичной окружности $\gamma : |z| = 1$.

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \, \sin\varphi}$, где $-1 < a < 1$.

$\triangleright$ После замены $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; \ 2\pi]$, $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$, приходим к интегралу

$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{iz \left(1 + \dfrac{a}{2i} \left(z - \dfrac{1}{z} \right) \right)} = 2 \cdot \oint_\gamma \frac{dz}{az^2 + 2i \, z - a} \, .$$

Корнями уравнения $az^2 + 2i\,z - a = 0$, $a \neq 0$, являются числа $z_{1,2} = \dfrac{i}{a} \left(-1 \pm \sqrt{1 - a^2} \right)$ – простые полюсы функции $f(z) = \dfrac{1}{az^2 + 2i \, z - a}$. Нетрудно выяснить, что $z_1 = \dfrac{i}{a} \left(-1 + \sqrt{1 - a^2} \right) \in int\,\gamma$, в то время как $z_2 = \dfrac{i}{a} \left(-1 - \sqrt{1 - a^2} \right) \in ext\,\gamma$. Поэтому, вычислив

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \left. \frac{z - z_1}{a \, (z - z_1)(z - z_2)} \right|_{z_1} = \frac{1}{a \, (z_1 - z_2)} = \frac{1}{2i \, \sqrt{1 - a^2}} \, ,$$

имеем

$$I = 2 \cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \, .$$

Осталось заметить, что полученный результат справедлив и при $a = 0$ $\triangleleft$

23.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите следующие интегралы (замкнутые контуры положительно ориентированы):

   $a)$ $\displaystyle\oint_\gamma z\,\mathrm{ctg}\,z\,dz\,,\quad \gamma:|z|=4\,;$ $\qquad b)$ $\displaystyle\oint_\gamma z^4\,\sin\,\frac{1}{z}\,dz\,,\quad \gamma:|z|=1\,;$

   $c)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^4+2z^2+1}\,dz\,,\quad \gamma:|z+i|=1\,;$ $\qquad d)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\cos\,\frac{1}{z}}{(z^3+1)^3(z-3)}\,dz\,,\quad \gamma:|z|=2\,;$

   $e)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z-1}{e^z+2}\,dz\,,\quad \gamma:|z-1+i\pi|=1\,;$ $\qquad f)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^7}{3z^8+1}\,dz\,,\quad \gamma:|z|=1\,;$

   $g)$ $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^5-3iz+2}{(2z-i)^{2007}}\,dz\,,$ γ – контур квадрата с вершинами в точках $z=\pm1$, $z=\pm i$;

   $h)$ $\displaystyle\oint_\gamma \sin\,\frac{z}{z+1}\,dz\,,\quad \gamma:|z+2|=2\,;$ $\qquad i)$ $\displaystyle\oint_\gamma z^5\cdot\sin\,\frac{2}{z}\cdot\cos\,\frac{z}{z^2+4}\,dz\,,\quad \gamma:|z-1|=2\,.$

2. Найдите значение a, при котором функция $\displaystyle F(z)=\int_{z_0}^{z} e^{\zeta}\cdot\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{a}{\zeta^3}\right)d\zeta$ однозначна в области $D=\mathbf{C}\setminus\{0\}$ (здесь $z,\,z_0\in D$).

3. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов:

   $a)$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{5-4\,\cos\varphi}\,;$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{4-\sin 2\varphi}\,;$ $\qquad c)$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,;$

   $d)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+2\cos^2 x}\,;$ $\qquad e)$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x+1}{\sin x+2}\,dx\,;$ $\qquad f)$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}\,dx\,;$

   $g)$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\,\cos\varphi+a^2}$ $\quad(0<a<1);$ $\qquad h)$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\,\cos\varphi)^2}$ $\quad(0<b<a).$

§24. Применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов

24.1. Несобственные интегралы вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx$

Лемма 1. *Пусть* $\overline{D}=\{\mathrm{Im}\,z\ge0\}\cap\{|z|\ge R_0\}$, $C_R=\{|z|=R,\ 0\le\arg z\le\pi\}$, *функция* $F(z)$ *непрерывна в* $\overline{D}$. *Если*
$M_F(R)\equiv\max\limits_{z\in C_R}|F(z)|=o\left(\dfrac{1}{R}\right)$, *при* $R\to\infty$, *то* $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)\,dz=0.$

Теорема 24.1. *Пусть функция* $F(z)$ *аналитична в замкнутой полуплоскости* $\{\mathrm{Im}\,z\ge0\}$ *за исключением конечного числа особых точек* $z_1,\dots z_n$, *не лежащих на действительной прямой, и* $M_F(R)=o\left(\dfrac{1}{R}\right)$ *при* $R\to\infty$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathop{\mathrm{res}}_{z_k}F(z) \tag{1}$$

(интеграл в левой части существует, вообще говоря, в смысле главного значения).

Следствие 1. *Пусть* $F(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, *где* $P_m(x)$ *и* $Q_n(x)$ *– многочлены степеней* m *и* n *соответственно,* $n - m \geq 2$, $Q_n(x) \neq 0,\ x \in \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname*{res}_{z_k} F(z)\,, \tag{3}$$

где $\{z_k\}$ *– все особые точки рациональной функции* $F(z)$, *находящиеся в верхней полуплоскости.*

Замечания.

1) Коэффициенты $R(z)$ не обязаны быть вещественными.

2) Для вычисления интеграла от рациональной функции, удовлетворяющей требованиям следствия 1, в формуле (3) можно использовать взятую со знаком минус сумму вычетов по всем особым точкам $F(z)$, находящимся в нижней полуплоскости (докажите самостоятельно).

Примеры. Вычислить интегралы

$a)$ $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx\,;$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - i}\,.$

$\triangleright$ $a)$ Рассмотрим $F(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ – функцию, отвечающую условиям следствия 1. Четыре корня уравнения

$$z^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i\,(\pi + 2\pi n)}{4}}\,, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

являются простыми полюсами $F(z)$, причем точки $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ расположены в верхней полуплоскости.

Учитывая четность подынтегральной функции и формулу (3), имеем

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \pi i \cdot \left(\operatorname*{res}_{z_1} F(z) + \operatorname*{res}_{z_2} F(z) \right)\,.$$

Находим вычет

$$\operatorname*{res}_{z_1} F(z) = \left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z_1} = \left.\frac{1}{4\,z}\right|_{z_1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,(1 - i).$$

Аналогично $\operatorname*{res}_{z_2} F(z) = \dfrac{1}{4} \cdot e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\,(1 + i).$

Итак,

$$I = \pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}\,(1 - i - 1 - i) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

$b)$ Функция $F(z) = \dfrac{1}{z^3 - i}$ имеет три простых полюса $z = \sqrt[3]{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right)}$, $n = 0,\ 1,\ 2\,,$ два из которых расположены в верхней полуплоскости, а один: $z_0 = -i$ – в нижней.

Находим вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=-i} F(z) = \left.\dfrac{1}{(z^3-i)'}\right|_{z=-i} = \left.\dfrac{1}{3z^2}\right|_{z=-i} = -\dfrac{1}{3}$. Теперь, имея в виду замечание 3, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-i} = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i} F(z) = \frac{2\pi}{3} i \qquad \lhd$$

24.2. Несобственные интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos ax\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\sin ax\,dx$

Лемма 2 (Жордан). *Пусть* $a > 0$, $\overline{D} = \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \cap \{|z| \geq R_0\}$, $C_R = \{|z| = R,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$. *Если функция* $f(z)$ *непрерывна в* $\overline{D}$ *и* $M_f(R) \equiv \max\limits_{z \in C_R} |f(z)| = o(1)$ *при* $R \to \infty$, *то* $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{iaz}\, dz = 0$.

Теорема 24.2. *Пусть* $a > 0$, *функция* $f(z)$ *аналитична в замкнутой полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ *кроме конечного числа особых точек* $z_1, \ldots z_n$, *не лежащих на действительной прямой, и* $M_f(R) = o\,(1)$ *при* $R \to \infty$. *Тогда для несобственных интегралов (существующих вообще говоря в смысле главного значения) справедливы равенства:*

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos ax\,dx = \operatorname{Re} A, \quad v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\sin ax\,dx = \operatorname{Im} A, \tag{4}$$

где

$$A = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} \Big(f(z)\, e^{iaz}\Big). \tag{5}$$

Следствие 2. *Пусть* $a > 0$, $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, *где* $P_m(x)$ *и* $Q_n(x)$ *– многочлены степеней* m *и* n *соответственно,* $n - m \geq 1$, *и пусть* $Q_n(x) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \cos ax\,dx = \operatorname{Re}\ A\ , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \sin ax\,dx = \operatorname{Im}\ A\ , \tag{6}$$

где

$$A = 2\pi i \cdot \sum_{k} \operatorname*{res}_{z_k} \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\ e^{iaz}\right), \tag{7}$$

а $\{z_k\}$ *– все особые точки рациональной функции* $f(z)$, *находящиеся в верхней полуплоскости.*

Примеры. Вычислить интегралы

$a)$ $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+5} \sin 2x\,dx$; $\qquad b)$ $I(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\,\lambda x}{x^2+1}\,dx$.

$\rhd$ $a)$ Функция $F(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z+5}\, e^{2zi}$ имеет два простых полюса в конечной части комплексной плоскости: $z_{1,2} = -2 \pm i$. Один из них, а именно $z_1 = -2 + i$, находится в верхней полуплоскости. Найдем вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = \lim_{z\to z_1} F(z)\,(z-z_1) = \frac{z+1}{z-z_2}\; e^{2zi}\Big|_{z=z_1} = \frac{i-1}{2i}\cdot e^{-2-4i}.$$

Поэтому

$$A = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = \frac{\pi}{e^2}\,(i-1)\,e^{-4i} = \frac{\pi}{e^2}\,(i-1)\,(\cos 4 - i\sin 4)\,.$$

Следовательно, согласно (6) получаем

$$I = \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{e^2}\,(\cos 4 + \sin 4)$$

b) Данный интеграл, называемый *интегралом Лапласа,* в силу четности косинуса можно переписать в виде $\quad I(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos|\lambda|x}{x^2+1}\,dx\,.$

При $\lambda = 0$ получаем $\quad I(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi\,.$

Теперь достаточно рассмотреть случай $\lambda > 0$. Функция $F(z) = \dfrac{e^{i\lambda z}}{z^2+1}$ имеет в верхней полуплоскости простой полюс $z_0 = i$. Вычислим

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} F(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{(z^2+1)'}\Big|_{z=i} = \frac{e^{i\lambda z}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$$

и в соответствии с (6)–(7) получим

$$I(\lambda) = \operatorname{Re}\Big(2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} F(z)\Big) = \pi\, e^{-\lambda}.$$

Итак, окончательно, учитывая четность по λ, имеем $\qquad I(\lambda) = \pi\, e^{-|\lambda|} \qquad \lhd$

24.3. Интегралы с особенностями 2-го рода

Одним из условий основной теоремы о вычетах является требование отсутствия особых точек функции на контуре интегрирования. Как же быть, если к вычислению предлагается несобственный интеграл с особенностью 2-го рода? Ответ прост: следует взять контур, обходящий особую точку, а затем в результате предельного перехода (и соответствующей деформации кривой) получить искомый интеграл. Эта процедура использована при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 24.3. *Пусть функция* $F(z)$ *аналитична в замкнутой полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z \ge 0\}$ *за исключением конечного числа особых точек* $z_1, \dots z_n$, $\operatorname{Im} z_k > 0\ \forall k,$ *и конечного числа простых полюсов* $x_1, \dots, x_m$, *лежащих на действительной прямой; пусть также*

$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)\,dz = 0\,,$ *где* $C_R = \{|z| = R,\ 0 \le \arg z \le \pi\}.$ *Тогда*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} F(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{x_k} F(z) \right). \tag{8}$$

Замечание. Несобственный интеграл второго рода в утверждении теоремы 24.3 существует *только* в смысле главного значения, в обычном смысле он расходится.

Примеры.

Вычислить интегралы

$$a) \qquad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x^4+1)}\,dx\,; \qquad b) \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^3+8}\,dx\,.$$

$\triangleright$ $a)$ Особыми точками функции $F(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z^4+1)}$ являются нули знаменателя: $z_0 = 1$ и $z_{1-4} = \sqrt[4]{-1}$; это все простые полюсы. Точки $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}\,i}$ и $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}\,i}$ находятся в верхней полуплоскости.

Найдем вычеты, используя различные приемы:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z\to 1} F(z)\,(z-1) = \left.\frac{z^2}{z^4+1}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}\,;$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = \left.\frac{z^2}{\big((z-1)(z^4+1)\big)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2}{5z^4-4z^3+1}\right|_{z=z_1} =$$

$$= \frac{i}{-5-4\,e^{\frac{3\pi}{4}\,i}+1} = -\frac{i}{4\left(1+e^{\frac{3\pi}{4}\,i}\right)}\,.$$

Аналогично

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} F(z) = \frac{i}{4\left(1+e^{\frac{\pi}{4}\,i}\right)}\,.$$

Поэтому в соответствии с формулой (8)

$$I_1 = \frac{2\pi i}{4}\left(-\frac{i}{1+e^{\frac{3\pi}{4}\,i}} + \frac{i}{1+e^{\frac{\pi}{4}\,i}} + 1\right) = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{e^{\frac{3\pi}{4}\,i}-e^{\frac{\pi}{4}\,i}}{e^{\frac{3\pi}{4}\,i}+e^{\frac{\pi}{4}\,i}}\,i+1\right) =$$

$$= \frac{i\pi}{2}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot\left(e^{\frac{\pi}{4}\,i}-e^{-\frac{\pi}{4}\,i}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot\left(e^{\frac{\pi}{4}\,i}+e^{-\frac{\pi}{4}\,i}\right)}\,i+1\right) = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{-2\sin\dfrac{\pi}{4}}{2\cos\dfrac{\pi}{4}}+1\right) = 0\,.$$

$b)$ Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{e^{2iz}}{z^3+8}$, которая имеет простые полюсы в точках $z_0 = -2$ и $z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Здесь $\operatorname{Im} z_1 > 0$.

Так как $\operatorname*{res}_{z=z_k} F(z) = \left.\dfrac{e^{2iz}}{3\,z^2}\right|_{z_k}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} F(z) = \frac{e^{-4i}}{12}\,, \qquad \operatorname*{res}_{z=z_1} F(z) = -\frac{e^{\,2(-\sqrt{3}+i)}}{6\,(1-i\sqrt{3})} = -\frac{e^{-2\sqrt{3}}}{24}\,e^{\,2i}\,(1+i\sqrt{3})\,.$$

Поэтому согласно (8) имеем

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^3+8}\,dx=\frac{\pi i}{12}\,\left(e^{-4i}-e^{-2\sqrt{3}}\,(\cos 2+i\,\sin 2)\,(1+i\sqrt{3})\right)\equiv A\,,$$

следовательно,

$$I_2=\operatorname{Im}\,A=\frac{\pi}{12}\,\left(\cos 4-e^{-2\sqrt{3}}\,(\cos 2-\sqrt{3}\,\sin 2\right)\qquad\lhd$$

24.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите с помощью вычетов интегралы от рациональных функций:

$a)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx\,;\qquad b)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+4a^2)^2}\quad(a>0);$

$c)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+10)^2}\,;\qquad d)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2+13}{x^4+13x^2+36}\,dx\,;$

$e)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3+8i}\,;\qquad f)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2(x^2-ix-1)}\,;$

$g)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\sin(x-2)}{x^2+2}\,dx\,;\qquad h)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(3-8x)}{(4x^2-7x+5)}\,dx\,.$

2. Вычислите следующие интегралы:

$a)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^2-4x+5}\,\cos 3x\,dx\,;\qquad b)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^2+4}\,\sin 2x\,dx\,;$

$c)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2-2x+10)^2}\,dx\,;\qquad d)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(x^2+4x+5)^2}\,dx\,.$

3. Вычислите интегралы (понимаемые в смысле главного значения):

$a)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)\,(x-2)}\,dx\,;\qquad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\cos x}{(x^2+1)\,(x-1)}\,dx\,;$

$c)\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\,x}{x\,(x^2+4)}\,dx\,;\quad d)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^4-1}\,dx\,;\quad e)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-16}\,dx.$

4. Выясните расположение дуги окружности C_R и сформулируйте вариант леммы Жордана, условия которого обеспечивают выполнение следующего равенства:

$a)\ \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,e^{iaz}\,dz=0\qquad\text{при}\ \ a<0\,;$

$b)\ \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,e^{az}\,dz=0\qquad\text{при}\ \ a<0.$

§25. Вычисление несобственных интегралов (продолжение)

25.1. Несколько замечаний общего характера

Основная идея вычисления определенных интегралов посредством выхода в комплексную плоскость состоит в использовании такой функции и такого замкнутого контура, к которым применима основная теорема о вычетах, приводящая к уравнению, откуда и можно найти требуемый интеграл.

При вычислении собственных интегралов в п. 23.3 это достигается за счет замены переменной.

В случае несобственных интегралов, которые сами по себе являются реализацией предельных переходов, естественно ожидать, что предельному переходу (или нескольким предельным переходам одновременно) подвергается некоторое равенство, выражающее основную теорему о вычетах. В этом процессе происходят как непрерывная деформация контура интегрирования, так и, возможно, изменение самого подынтегрального выражения. При правильном выборе функции и контура интегрирования в результате должны получаться искомый интеграл, а также известные выражения (часто, но не обязательно, принимающие в пределе нулевое значение).

Таким образом, в общей ситуации решение задачи вычисления интеграла методами ТФКП начинается с выяснения двух вопросов: 1) какова интегрируемая функция $F(z)$? 2) каков контур интегрирования ?

Простейшие примеры, иллюстрирующие вышесказанное, представлены в пп. 24.1 и 24.2. В первом случае $F(z)$ является аналитическим продолжением подынтегральной функции, во втором – $F(z)$ выбирается несколько иначе. Контур интегрирования одинаков в обоих случаях: одна его часть – отрезок действительной прямой – присутствует необходимым образом, так как отсюда в пределе и получаются искомые интегралы; другая – дуга, обеспечивающая замыкание контура, – такова, что интегралы по ней в пределе исчезают.

Во всех изученных нами выше случаях вычисление интегралов можно было провести в общем виде, что и нашло отражение в формулировках утверждения п. 23.3 и теорем 24.1–24.3. Затем, при решении конкретной задачи соответствующего типа, использовалась полученная формула.

Если же требуется решить нетиповую задачу, следует полностью реализовать описанную нами схему, как это будет показано в приводимых ниже примерах.

25.2. Трудности в выборе функции

В п. 24.2 мы имели возможность убедиться, что комплексная функция $F(z)$ не обязана быть аналитическим продолжением подынтегральной. Встречаются и другие ситуации, когда выбор $F(z)$ совсем не очевиден (см. пример ниже, а также п. 25.4).

Пример. Вычислить интеграл $\quad I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$;

$\triangleright$ Для нахождения I выберем $f(z) = \dfrac{e^{2zi} - 1}{2z^2}$ и контур $\gamma_{R,\rho}$, состоящий из отрезков $[-R\,; -\rho]$ и $[\rho\,; R]$ действительной оси и двух полуокружностей C_R и C_ρ (рис. 41).

Особая точка $z = 0$ функции $f(z)$ не должна находиться на линии интегрирования, обходим ее по дуге C_ρ. Поскольку других особых точек в конечной части комплексной плоскости $f(z)$ не имеет, согласно основной теореме получаем

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\rho}^{R} f(x)\, dx + \int_{-R}^{-\rho} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{C_\rho} f(z)\, dz = 0\,. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо $\forall R \ge R_0$ и $\forall \rho,\ 0 < \rho \le \rho_0 < R_0$, поэтому можно совершить предельный переход при $R \to +\infty$ и $\rho \to 0$.

При этом

$$\int_{-R}^{-\rho} f(x)\,dx + \int_{\rho}^{R} f(x)\,dx \ \to\ v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\ .$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_{\pi}^{0} f(\rho e^{i\varphi})\,\rho i e^{i\varphi}\,d\varphi = -\int_0^{\pi} i\,\frac{e^{2i\rho e^{i\varphi}} - 1}{2\rho\, e^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\pi} i\,\frac{1 + 2i\,\rho e^{i\varphi} + O(\rho^2) - 1}{2\rho\, e^{i\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\pi} \left(1 + O(\rho)\,\right) d\varphi \ \to \pi\,.$$

Интеграл по дуге C_R распадается на разность

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} \frac{e^{2zi} - 1}{2z^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{e^{2zi}}{2z^2}\,dz - \int_{C_R} \frac{dz}{2z^2}\,,$$

где оба интеграла исчезают при $R \to +\infty$ – первый в силу леммы Жордана, второй – по лемме 1 п. 24.1.

Таким образом, равенство (1) в пределе дает

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2xi} - 1}{2x^2}\,dx + \pi = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v.p. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x - 1}{2x^2}\,dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2}\,dx \right) = -\pi\,,$$

откуда, проводя тригонометрические преобразования и выделяя действительную часть, имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi$$

(заметим, что I не имеет особенности в точке $x = 0$ и сходится как интеграл первого рода) $\quad\triangleleft$

25.3. Трудности в выборе контура

В примерах этого пункта существенную роль при выборе контура интегрирования играет неоднолистность функции.

Примеры. Вычислить интегралы

$a)\qquad I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}\,, \quad n \in \mathbf{N},\ n \ge 2\ ;$

$b)\qquad I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{e^x + 1}\,dx \quad (0 < p < 1).$

$\triangleright$ $a)$ Возьмем $f(z) = \dfrac{1}{z^n + 1}$. Заметив, что на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \dfrac{2\pi}{n}$ поведение $f(z)$ одинаково, в качестве контура γ_R выберем границу кругового сектора радиуса R с углом $\dfrac{2\pi}{n}$ (рис. 42).

Особые точки $f(z)$ – n простых полюсов $z_k = \sqrt[n]{-1} = e^{\frac{i\pi(1+2k)}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, лишь один из которых – $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$ – находится внутри γ_R. Поэтому

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z_0} f(z)\,. \tag{2}$$

Вычислив
$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{n\, z_0^{n-1}} = \frac{1}{n}\, e^{-\frac{i\pi(n-1)}{n}} = -\frac{1}{n}\, e^{\frac{i\pi}{n}},$$
детально распишем равенство (2):
$$\int_0^R f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_1} f(z)\, dz = -\frac{2\pi i}{n}\, e^{\frac{i\pi}{n}}\,. \tag{3}$$
Поскольку это равенство справедливо $\forall R > 1$, сделаем в нем предельный переход при $R \to +\infty$. Для этого найдем предел каждого из интегралов из левой части (3):
$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx = I_1\ ;$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \left\{ z = r\, e^{\frac{2\pi i}{n}},\ r \in [0\,; R] \right\} = \int_R^0 f\left(re^{\frac{2\pi i}{n}} \right)\, e^{\frac{2\pi i}{n}}\, dr =$$
$$= -\int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}}{r^n + 1}\, dr \ \to\ -e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot I_1\ .$$
$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(Re^{i\varphi})\, Rie^{i\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{Rie^{i\varphi}}{R^n e^{in\varphi} + 1}\, d\varphi\ .$$
Оценим последний интеграл, используя вариант неравенства треугольника $|a+b| \geq ||a| - |b||$:
$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left| \frac{Rie^{i\varphi}}{R^n e^{in\varphi} + 1} \right| d\varphi \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n - 1}\, d\varphi = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{R}{R^n - 1} \ \to\ 0$$
при $R \to +\infty$, так как $n \geq 2$.

Итак, из равенства (3) имеем:
$$I_1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot I_1 = -\frac{2\pi i}{n} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}},$$
поэтому
$$I_1 = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{2\pi i}{n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}} \right)} = \frac{\pi}{n\, \sin\dfrac{\pi}{n}}\ .$$

b) Выберем $f(z) = \dfrac{e^{pz}}{e^z + 1}$ и, учитывая периодичность экспоненты с периодом $2\pi i$, рассмотрим в качестве γ_R контур прямоугольника с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$ (рис. 43).

Рис. 42 *Рис. 43*

Решения уравнения

$$e^z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \mathrm{Ln}(-1) = i\pi\,(1 + 2\pi n)\,, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

являются особыми точками $f(z)$. Только одна из них, а именно $z_0 = \pi i \in int\,\gamma_R$. Очевидно, это простой полюс $f(z)$. Найдем вычет:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \left.\frac{e^{pz}}{(e^z+1)'}\right|_{z_0} = \frac{e^{pz_0}}{e^{z_0}} = -e^{ip\pi}\,.$$

Поэтому

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i \cdot e^{ip\pi}\,,$$

т.е.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -2\pi i \cdot e^{ip\pi}\,. \tag{4}$$

Как обычно, перейдем в полученном равенстве к пределу при $R \to +\infty$. Для этого рассмотрим предел каждого из интегралов в (4). Во-первых,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x+1}\,dx = I_2\,,$$

причем условие $0 < p < 1$ обеспечивает сходимость этого интеграла.

На верхней границе прямоугольника γ_2, где $z = x + 2\pi i$, $x \in [-R\,;R]$, за счет периодичности e^z получаем

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{p\,(x+2\pi i)}}{e^x+1}\,dx = -e^{2p\pi i} \cdot \int_{-R}^{R} \frac{e^{px}}{e^x+1}\,dx \;\to\; -e^{2p\pi i} \cdot I_2\,.$$

Изучим поведение интегралов на боковых сторонах прямоугольника. Если $z \in \gamma_1$, то $z = R + iy$, $y \in [0\,;2\pi]$, поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{p\,(R+iy)}}{e^{R+iy}+1}\,i\,dy\,,$$

следовательно,

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{pR}}{|e^{R+iy}+1|}\,dy \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{pR}}{e^R-1}\,dy \sim 2\pi\,e^{(p-1)\,R} \to 0$$

при $R \to +\infty$, так как $p < 1$.

Аналогично доказывается, что $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz \to 0$ вследствие условия $p > 0$.

Итак, равенство (4) в пределе приобретает вид

$$I_2 - e^{2p\pi i} \cdot I_2 = -2\pi i \cdot e^{p\pi i}\,,$$

значит,

$$I_2 = \frac{2\pi i \cdot e^{p\pi i}}{e^{2p\pi i}-1} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad \lhd$$

25.4. Использование регулярных ветвей многозначных функций

В следующих задачах применяются многозначные функции $\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k)$ и $z^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z}$. Известно, что в области $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$, т.е. в плоскости с разрезом по вещественной положительной полуоси, возможно выделение регулярных однозначных ветвей. Это, например, главное значение логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $\arg z \in [0\,;\,2\pi)$, а также $z^\alpha = e^{\alpha\ln z} = |z|^\alpha e^{i\,\alpha\arg z}, \alpha \in \mathbf{R}$. В частности, при $\arg z = 0$ имеем $z = x > 0$ и $z^\alpha = |z|^\alpha = x^\alpha > 0$.

Примеры. Вычислить интегралы

$$a)\qquad I_1 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx\,;\qquad b)\qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx\qquad (0<p<1).$$

$\triangleright$ $a)$ Пусть $f(z) = \dfrac{\ln z}{z^2+1}$ – однозначная регулярная ветвь многозначной функции с особыми точками $z_0 = 0$ (точка ветвления) и $z_1 = \pm i$ (простые полюсы). Выберем контур $\gamma_{R,\rho}$ – границу верхнего полукруга радиуса R с обходом точки $z_0 = 0$ по дуге C_ρ (рис. 44). Тогда по теореме 23.1

$$\oint_{\gamma_{R,\rho}} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z_0}\ f(z)\,,$$

или

$$\int_\rho^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{\ln z}{2z}\bigg|_{z=i}. \tag{5}$$

В равенстве (5), справедливом $\forall R \ge R_0$ и $\forall\rho$, $0<\rho\le\rho_0<R_0$, совершим предельный переход при $R\to+\infty$ и $\rho\to 0$. При этом $\displaystyle\int_\rho^R f(x)\,dx \ \to\ I_1$ (легко проверить, что интеграл сходится).

Оценим интегралы по дугам:

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(R\,e^{i\varphi})\,Rie^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^\pi \frac{\ln R + i\,\varphi}{R^2\,e^{2i\varphi}+1}\,R\,e^{i\varphi}\,d\varphi\,,$$

следовательно,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \frac{|\ln R + i\,\varphi|}{|R^2\,e^{2i\varphi}+1|}\,R\,d\varphi \sim \int_0^\pi \frac{\ln R}{R}\,d\varphi\ \to\ 0\quad \text{при}\ R\to+\infty.$$

Аналогично $$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz\right| = \left|\int_\pi^0 f(\rho e^{i\varphi})\rho\,ie^{i\varphi}d\varphi\right| \le$$

$$\le \int_0^\pi \frac{\rho\,|\ln\rho + i\,\varphi|}{|\rho^2\,e^{2i\varphi}+1|}\,d\varphi \sim \int_0^\pi \rho\,|\ln\rho\,|d\varphi\ \to\ 0$$

при $\rho\to 0$. Наконец, для $z\in\gamma_1$, т.е. для $z = r\,e^{i\pi}$, получаем

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_R^\rho \frac{\ln r + i\,\pi}{(-r)^2+1}\,d(-r) = \int_\rho^R \frac{\ln r}{r^2+1}\,dr + \int_\rho^R \frac{i\,\pi}{r^2+1}\,dr\ \to$$

$$\to\ I_1 + i\,\pi\int_0^\infty \frac{dr}{r^2+1}\,,$$

когда $\; R \to +\infty, \;\; \rho \to 0.$

Таким образом, поскольку $\quad \ln i = \dfrac{\pi}{2}\, i\,, \quad$ из равенства (5) следует

$$2\, I_1 + i\,\pi \int_0^\infty \frac{dr}{r^2+1} = \frac{\pi^2}{2}\, i\,,$$

значит, $\; I_1 = \dfrac{1}{2}\, \mathrm{Re} \left(\dfrac{\pi^2}{2}\, i \right) = 0.\;$ Попутно получено значение интеграла $\; \displaystyle\int_0^\infty \frac{dr}{r^2+1} = \frac{\pi}{2}\,.$

Рис. 44 *Рис. 45*

b) Возьмем ту однозначную регулярную ветвь функции $\; f(z) = \dfrac{z^{p-1}}{z+1}, \;$ для которой $\; z^{p-1} = x^{p-1} > 0 \;$ при $z = x > 0\,.$ Рассмотрим в качестве контура систему двух окружностей, соединенных разрезом $[\rho; R]$ вещественной оси (рис. 45). Так как $\; f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+)$ за исключением простого полюса $z = -1$ и непрерывна вплоть до границы $\mathbf{R}^+ \;$ (т.е. на верхнем и нижнем "берегах"разреза при $x > 0$), то согласно основной теореме 18.1

$$\int_\rho^R f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_\gamma f(z)\, dz + \int_{C_\rho} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) \qquad (6)$$

(γ – нижний "берег"разреза, где $\; z = r\, e^{2\pi i}$).

Рассмотрим теперь предельный переход при $\; R \to +\infty \;$ и $\; \rho \to 0. \quad$ При этом $\displaystyle\int_\rho^R f(x)\, dx \;\to\; I_2 \quad$ (условие $0 < p < 1\;$ обеспечивает сходимость интеграла).

Далее, $\qquad \displaystyle\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f\left(R\, e^{i\varphi}\right)\, i\, R\, e^{i\varphi} d\varphi \right| \le$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{\left| R^{\,p-1}\, e^{i(p-1)\,\varphi} \right|}{|\, R\, e^{i\,\varphi} + 1|} \left| i\, R\, e^{i\,\varphi} \right|\, d\varphi \le \int_0^{2\pi} \frac{R^p}{|R-1|}\, d\varphi \sim \int_0^{2\pi} R^{\,p-1}\, d\varphi.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $\; R \to +\infty, \;$ так как $\; p < 1.$

Точно так же $\qquad \displaystyle\left| \int_{C_\rho} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{2\pi}^{0} f\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)\, i\, \rho\, e^{i\varphi} d\varphi \right| \le$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{\left| \rho^{\,p-1}\, e^{i(p-1)\,\varphi} \right|}{|\, \rho\, e^{i\,\varphi} + 1|} \left| i\, \rho\, e^{i\,\varphi} \right|\, d\varphi \le \int_0^{2\pi} \frac{\rho^p}{|\rho-1|}\, d\varphi \sim \int_0^{2\pi} \rho^{\,p}\, d\varphi \;\to\; 0$$

при $\; \rho \to 0, \;$ так как $\; p > 0.$

Наконец, для $z \in \gamma$ имеем

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_R^\rho f\left(r\,e^{2\pi i}\right)\,e^{2\pi i}\,dr = -\int_\rho^R \frac{r^{\,p-1}\,e^{2i\pi(p-1)}}{r\,e^{2i\pi}+1}\,e^{2\pi i}\,dr =$$

$$-\int_\rho^R \frac{r^{\,p-1}\,e^{2i\pi p}}{r+1}\,dr = -e^{2i\pi p}\int_\rho^R \frac{r^{\,p-1}}{r+1}\,dr \;\to\; -e^{2i\pi p}\,I_2\,.$$

Найдем вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = z^{\,p-1}\Big|_{z=-1} = (-1)^{\,p-1} = e^{\,i(p-1)\,\pi} = e^{-i\,\pi}\cdot e^{\,ip\,\pi} = -e^{\,ip\,\pi}$$

Поэтому из равенства (6) получаем

$$I_2 - e^{\,2i\pi p}\,I_2 = -2\pi i\,e^{\,ip\,\pi} \quad\Leftrightarrow\quad I_2 = 2\pi i\,\frac{e^{\,ip\,\pi}}{e^{\,2i\pi p}-1} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \triangleleft$$

Замечание. Известно, что $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{\,p+q}}\,dx = B(p,q)\,,$

где $B(p,q)$ – бета-функция Эйлера. Поэтому $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx = B(p,1-p)$. Таким образом, получена формула

$$B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (0<p<1).$$

25.5. Различные трудности

Разумеется, распределение задач, рассматриваемых в настоящем параграфе, по принадлежности к тому или иному типу весьма условно (как и само понятие "трудности"). В этом разделе мы рассмотрим примеры ситуаций, когда и выбор функции, и выбор контура представляют определенные затруднения.

Примеры. Вычислить интегралы

a) $\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\lambda x\,dx\,;$

b) $\displaystyle I = \int_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx\,, \qquad 0<p<1\,,\;\; a>0.$

$\triangleright$ Если $\lambda = 0$, то имеем $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Эйлера-Пуассона).

Далее в силу четности косинуса ограничимся случаем $\lambda > 0$.

Рассмотрим $f(z) = e^{-z^2}$, а в качестве контура γ_R – прямоугольник с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R + \lambda i$ (см. рис. 46).

Поскольку $f(z)$ не имеет особых точек в $\mathbf{C}$, согласно основной теореме получаем

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_{-R}^R f(x)\,dx + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0\,. \qquad (7)$$

Перейдем к пределу при $R \to +\infty$ в равенстве (7). При этом

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Далее,

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} f(x+i\lambda)\,dx = -\int_{-R}^{R} e^{-(x+i\lambda)^2}\,dx =$$

$$= -e^{\lambda^2} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,(\cos 2\lambda x - i\,\sin 2\lambda x)\,dx = -2e^{\lambda^2} \int_{0}^{R} e^{-x^2}\,\cos 2\lambda x\,dx \;\to$$

$$-2e^{\lambda^2} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\cos 2\lambda x\,dx = -2e^{\lambda^2}\,I \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Интеграл по отрезку γ_1, где $z = R + iy$, $y \in [0\,;\lambda]$, равен

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{0}^{\lambda} e^{-(R+iy)^2}\,i\,dy = i\,e^{-R^2} \int_{0}^{\lambda} e^{\,y^2-2iRy}\,dy\,.$$

Поэтому $$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| \le e^{-R^2} \int_{0}^{\lambda} e^{\,y^2}\,\left|e^{-2iRy}\right|\,dy =$$

$$= e^{-R^2} \int_{0}^{\lambda} e^{\,y^2}\,dy \le e^{-R^2} \int_{0}^{\lambda} e^{\,\lambda^2}\,dy = e^{-R^2}\,e^{\,\lambda^2}\,\lambda \;\to\; 0,$$

когда $R \to +\infty$.

Аналогичная оценка справедлива для $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz.$

Таким образом, равенство (7) в пределе дает

$$\sqrt{\pi} - 2e^{\,\lambda^2}\,I = 0 \quad\Leftrightarrow\quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\lambda^2}\,.$$

Рис. 46 *Рис. 47*

b) Выберем однозначную регулярную ветвь многозначной функции $f(z) = z^{p-1}\,e^{-az}$, для которой $z^{p-1} = x^{p-1} > 0$ при $z = x > 0$ и контур $\gamma_{R,\rho}$, изображенный на рис. 47.

Поскольку $f(z)$ не имеет особых точек внутри контура, то согласно основной теореме

$$\oint_{\gamma_{R,\rho}} f(z)\,dz = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\int_{\rho}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0\,. \qquad (8)$$

В пределе при $R \to +\infty$ и $\rho \to 0$ получаем:

$$\int_\rho^R f(x)\,dx = \int_\rho^R x^{p-1}\,e^{-ax}\,dx \;\to\; \int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\,dx = \{t = ax\} =$$

$$= \frac{1}{a^p}\int_0^\infty t^{p-1}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{a^p}\,\Gamma(p)\,,$$

где $\Gamma(p)$ – гамма-функция Эйлера.

Далее, нетрудно показать (проведите выкладки самостоятельно), что

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0\,, \qquad \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0\,.$$

Искомый интеграл возникает при рассмотрении $z \in \gamma$, где $z = iy$, $y \in [\rho\,,\,R]$, когда $R \to +\infty$ и $\rho \to 0$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_R^\rho f(iy)\,i\,dy = -\int_\rho^R (iy)^{p-1}\,e^{-iay}\,i\,dy =$$

$$-i^p\int_\rho^R y^{p-1}\,(\cos ay - i\,\sin ay)\,dy \;\to\; -i^p\int_0^\infty y^{p-1}\,(\cos ay - i\,\sin ay)\,dy.$$

Итак, предельный переход в (8) приводит к равенству

$$\int_0^\infty y^{p-1}\,(\cos\,ay - i\,\sin\,ay)\,dy = \frac{i^{-p}}{a^p}\,\Gamma(p)\,. \tag{9}$$

Поскольку $i^{-p} = e^{-i\frac{\pi p}{2}} = \cos\dfrac{\pi p}{2} - i\,\sin\dfrac{\pi p}{2}$, то из (9) следует

$$I = \operatorname{Re}\left(\frac{i^{-p}}{a^p}\,\Gamma(p)\right) = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\,\cos\frac{\pi p}{2} \qquad \lhd$$

25.6. Вопросы и задачи

Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов:

1. *a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\,bx - \cos\,ax}{x^2}\,dx\,;$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$

   Указание. $f(z) = \dfrac{e^{3iz} - 3\,e^{iz} + 2}{z^3}$.

2. *a*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,dx$ $(n \in \mathbf{N},\, n \geq 2)\,;$ *b*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^6+1}\,dx\,;$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^x+1}\,dx$ $(0 < a,\, b < 1)$; *d*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{(e^x+1)(e^x+2)}\,dx$ $(0 < p < 2)$;

   e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{\operatorname{ch} x}\,dx$ $(|p| < 1)\,;$ *f*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch}\,x}\,dx\,;$ *g*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}\,x}\,dx$

   Указание. Контур – прямоугольник с вершинами $z = \pm R,\ \pm R + \pi i$.

3. В задачах $a) - c)$ предполагается, что $x^p > 0$ при $x > 0$:

$a)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+9}\,dx\,, \quad (|p|<1)\,;$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x+2)^2}\,dx \quad (|p|<1)\,;$

$c)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p\,(x+2)} \quad (0<p<1)\,;$ $\qquad d)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+1}\,dx\,;$

$e)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx\,;$ $\qquad f)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$

4. $a)$ $\displaystyle I = \int_0^{\infty} x^{p-1}\cos ax\,dx\,, \quad 0<p<1\,, \ \ a>0\,;$

$b)$ Вычислите интегралы Френеля: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx\,;$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx\,.$

Указание. $f(z) = e^{iz^2}$; контур – граница сектора $0 \le |z| \le R,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$.

§26. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше

26.1. Свойство логарифмического вычета

Пусть $f(z)$ – аналитическая в некоторой области функция, $f(z) \neq 0$. Тогда определена функция

$$\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln|f(z)| + i\,\mathrm{Arg}\, f(z) = \ln|f(z)| + i\,(\arg f(z) + 2\pi k), \qquad k \in \mathbf{Z},$$

причем если $\mathrm{Ln}_k\, f(z)$ – некоторая однозначная ветвь логарифма (значение k фиксировано), то существует $(\mathrm{Ln}_k\, f(z))' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Определения. Выражение $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ называется *логарифмической производной* функции $f(z)$.

Число $\displaystyle\operatorname*{res}_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно замкнутого контура γ.

Следующее утверждение выражает свойство логарифмического вычета.

Теорема 26.1. *Пусть D – ограниченная односвязная область, функция $f(z)$ аналитична в замыкании $\overline{D}$ за исключением, возможно, конечного числа особых точек, которые все являются полюсами. Пусть на границе ∂D области функция $f(z) \neq 0$ и не имеет особых точек. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_f - P_f\,, \tag{1}$$

где N_f и P_f – полное (т.е. считая с кратностью) количество нулей и полюсов $f(z)$ в D соответственно.

Замечание. Утверждение остается верным и в случае неодносвязной области D. При этом под ∂D подразумевается полная положительно ориентированная граница этой области.

Итак, для функции, удовлетворяющей требованиям теоремы, *логарифмический вычет относительно контура, ограничивающего некоторую область, равен разности между полным количеством ее нулей и полным числом полюсов внутри этой области.*

Примеры.

Найти вычет логарифмической производной функции
$f(z) = \dfrac{z - \sin z}{(z+2i)^2}$ относительно замкнутого контура γ, если γ:

$a)$ $|z| = 1$; $b)$ $|z+3i| = 2$; $c)$ $|z| = 1$; $d)$ $|z-3i| = 2$.

$\triangleright$ Данная функция имеет нуль 3-го порядка в точке $z_0 = 0$ и полюс 2-го порядка в точке $z_1 = -2i$ (докажите!)

$a)$ Внутри контура $|z| = 1$ находится точка $z_0 = 0$, поэтому, используя результаты теоремы 21.1, получаем $\operatorname*{res}_{\gamma} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = 3$.

$b)$ Внутри окружности $|z+3i| = 2$ находится точка $z_1 = -2i$, следовательно, $\operatorname*{res}_{\gamma} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = -2$.

$c)$ В этом случае $z_0, z_1 \in int\,\gamma$, значит, $\operatorname*{res}_{\gamma} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = 3 - 2 = 1$.

$d)$ Для этого случая имеем $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{int\,\gamma})$, причем $f(z) \neq 0$ при $|z-3i| \leq 2$, поэтому $\operatorname*{res}_{\gamma} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = 0$ $\triangleleft$

Заметим, что обычно интерес представляет проблема противоположного свойства: как из каких-то иных соображений найти значение логарифмического вычета, чтобы, например, определить количество нулей аналитической функции в данной области. Подход к решению этой проблемы дает так называемый *принцип аргумента.*

Рис. 48 a) *Рис. 48 b)* *Рис. 48 c)*

26.2. Принцип аргумента

Пусть γ – непрерывная кривая, соединяющая точки z_0 и z_1 и не проходящая через начало координат. Тогда для каждой точки $z \in \gamma$ справедливо представление $z = re^{i\alpha}$, где $\alpha \in \operatorname{Arg} z$. [2] Если $\arg z_0 = \alpha_0$, то при движении по кривой аргумент z непрерывно меняется до некоторого значения $\alpha_1 \in \operatorname{Arg} z_1$. Приращение $\alpha_1 - \alpha_0$ называется также вариацией аргумента при проходе кривой γ и обозначается $\operatorname*{Var}_{\gamma} \operatorname{Arg} z$. На рис. 48 $a)$, $b)$, $c)$ представлены различные кривые и соответствующие приращения аргументов. В частности, в случае замкнутой кривой $\operatorname*{Var}_{\gamma} \operatorname{Arg} z = 0$, если начало координат находится вне γ (рис. 48 b)), и $\operatorname*{Var}_{\gamma} \operatorname{Arg} z = 2\pi n$, если кривая совершает n

[2] Здесь подразумевается, что величина α определяется однозначно. Обозначение $\operatorname{Arg} z$ отражает лишь возможность использовать значения, выходящие за пределы промежутка для $\arg z$.

оборотов вокруг начала координат (рис. 48 c)).

Определение. Число $\operatorname*{Var}\limits_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z)$ называется *вариацией аргумента* функции $f(z)$ при проходе точки z по кривой γ.

Содержание теоремы 26.1 теперь можно представить в другой форме.

Теорема 26.2 (принцип аргумента). *Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в области D за исключением конечного числа особых точек, γ – замкнутый контур, $\overline{\mathrm{int}\,\gamma} \subset D$. Предположим, что все особые точки $f(z)$, находящиеся внутри γ, являются полюсами, $f(z)\big|_{\gamma} \neq 0$ и данная функция не имеет особых точек на γ. Тогда*

$$\operatorname*{Var}_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z) = 2\pi \left(N_f - P_f\right), \tag{4}$$

где N_f и P_f – полное количество нулей и полюсов $f(z)$ внутри γ соответственно.

Пример.

Определить количество нулей полинома $P(z) = z^3 + 3z^2 + z - 5$, расположенных в правой полуплоскости.

$\triangleright$ Рассмотрим положительно ориентированный замкнутый контур γ_R, состоящий из правой полуокружности C_R и отрезка $I_R = [-Ri\,; Ri]$ мнимой оси (рис. 49), при столь большом значении R, что внутри него находятся все корни $P(z)$, расположенные в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\; z > 0\}$.

Заметим, что

$$\operatorname{Arg}\, P(z) = \operatorname{Arg}\left(z^3\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z^3}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Arg}\, z^3 + \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z^3}\right) = 3\operatorname{Arg}\, z + \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z^3}\right).$$

Поэтому изменение аргумента $P(z)$ при движении точки z по полуокружности равно

$$\operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg} P(z) = 3 \operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg}\, z + \operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z^3}\right).$$

Перейдем к пределу при $R \to \infty$ в полученном равенстве. Поскольку существуют пределы

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg}\, z = \pi\,,$$

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z^3}\right) = 0\,,$$

то существует и предел

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{C_R} \operatorname{Arg} P(z) = 3\pi\,.$$

Рис. 49 *Рис. 50*

Осталось рассмотреть перемещение точки z "вниз" по отрезку I_R. Используя параметризацию $z = it$, где t меняется от R до $-R$, имеем

$$P(it) = -it^3 - 3t^2 + it - 5\,.$$

После отделения действительной и мнимой частей получаем параметрическое уравнение кривой $\Gamma(R)$, по которой движется точка $w = P(it)$, в виде

$$\begin{cases} u = -3t^2 - 5\,, \\ v = -t^3 + t\,, \\ t \in [-R\,;\,R]\,. \end{cases}$$

Заметив, что функция $u(t)$ – четная, а $v(t)$ – нечетная, нетрудно изобразить эскиз $\Gamma(R)$ (рис. 50). Так как $u \le -5$, то эта кривая целиком лежит в левой полуплоскости плоскости (w). Учитывая все вышесказанное, а также направление движения, имеем равенство для вариации аргумента:

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{I_R} \operatorname{Arg} P(z) = \lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{\Gamma(R)} \operatorname{Arg} w = \lim_{t\to-\infty} \arg w(t) -$$

$$- \lim_{t\to+\infty} \arg w(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi\,.$$

Поскольку $u(t) \ne 0$, то многочлен $P(z)$ не имеет нулей на мнимой оси, следовательно, на γ_R, поэтому можно применить принцип аргумента. В результате приходим к ответу:

$$N_P = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \operatorname*{Var}_{\gamma_R} \operatorname{Arg} P(z) = \frac{1}{2\pi}(3\pi - \pi) = 1 \qquad \triangleleft$$

26.3. Теорема Руше

Теорема 26.3. *Пусть D – ограниченная область, контур ∂D – ее граница; функции $f(z)$, $g(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Если*

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad \forall z \in \partial D,$$

то $N_{f+g} = N_f$ (здесь N_{f+g} и N_f – полное число нулей соответствующей функции внутри D).

Рис. 51 *Рис. 52*

Примеры.

1. Найти количество нулей многочлена $F(z)$ в области D, если
a) $F(z) = 2z^6 - 5iz^3 + z - 1\,, \quad D = \{\,|z| < 1\}$;

$b)\quad F(z) = 3z^7 + iz^5 - 8z^4 + 2z^2 + i\,, \quad D = \{1 < |z| < 2\}$.

$\triangleright$ $a)$ Заметив, что $F(z)$ – целая функция, представим ее в виде $F(z) = f(z) + g(z)$, где $f(z) = -5iz^3$, $g(z) = 2z^6 + z - 1$. Поскольку

$$|g(z)| = |2z^6 + z - 1| \le 2|z|^6 + |z| + 1\,,$$

то $|g(z)|\Big|_{z\in\partial D} = |g(z)|\Big|_{|z|=1} \le 4$. В то же время $|f(z)|\Big|_{z\in\partial D} = 5$, поэтому в силу теоремы Руше многочлен $F(z)$ имеет внутри единичного круга столько же нулей, сколько $f(z)$, т.е. три.

$b)$ Введем обозначения $\gamma : |z| = 1$; $\Gamma : |z| = 2$. Так как при $z \in \gamma$ справедливы соотношения

$$|-8z^4| = 8\,, \quad |3z^7 + iz^5 + 2z^2 + i| \le 3 + 1 + 2 + 1 = 7\,,$$

то по теореме Руше у функции $F(z)$ внутри круга, ограниченного γ, находятся четыре нуля.

Аналогично, оценивая при $z \in \Gamma$ выражения

$$|3z^7| = 3\,|z|^7 = 384\,, \quad |iz^5 - 8z^4 + 2z^2 + i| \le 2^5 + 8 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 177\,,$$

заключаем, что внутри окружности Γ многочлен $F(z)$ имеет семь нулей. Поскольку на окружности $\{|z| = 1\}$ у данного многочлена нулей нет (откуда это следует?), то в области $D = \{1 < |z| < 2\}$ имеется ровно три корня $F(z)$ $\triangleleft$

2. Найти количество корней уравнения $3z^2 + \operatorname{ch} iz = 0$ в области $D = \{\,|z| < 1\}$.

$\triangleright$ Если $g(z) = -\operatorname{ch} iz$ и $f(z) = 3z^2$, то для $|z| = 1$ имеем $|f(z)| = 3\,|z|^2 = 3$.
Кроме того, при тех же значениях z справедливо неравенство
$|e^{\pm iz}| \le e^{|z|} < e$ (докажите). Следовательно,

$$|g(z)| = |-\operatorname{ch} iz| = \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) < e < 3 = |f(z)|\,, \text{ если } |z| = 1\,.$$

Поэтому в силу теоремы Руше данное уравнение имеет в D столько же корней, сколько уравнение $f(z) = 0$, т.е. два $\triangleleft$

3. *Основная теорема высшей алгебры.*
Доказать, что многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_k \in \mathbf{C}$, $a_0 \ne 0$, имеет в комплексной плоскости ровно n корней (считая с кратностями).

$\triangleright$ Пусть $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, тогда из равенства

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{1}{a_0} \lim_{z\to\infty} \left(\frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right) = 0$$

следует, что найдется окружность $C_{R_0} = \{|z| = R_0\}$ достаточно большого радиуса, во всех точках которой

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| > |g(z)|\,.$$

Тогда по теореме Руше (все ее условия выполнены) многочлен $P_n(z)$ имеет столько же нулей внутри C_{R_0}, сколько и $f(z) = a_0 z^n$, т.е. ровно n. Осталось заметить, что это верно при любом значении $R > R_0$ $\triangleleft$

26.4. Вопросы и задачи

1. Непосредственным вычислением найдите вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки $z_0 \neq \infty$, являющейся полюсом порядка l.

2. Пусть $g \in \mathcal{A}(z_0)$, точка $z_0 \neq \infty$ – нуль порядка n функции $f(z)$. Найдите вычет функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}\,g(z)$ относительно z_0, если

   $a)$ $g(z_0) \neq 0$; $b)$ $g(z_0) = 0$.

3. Пусть $g \in \mathcal{A}(z_0)$, точка $z_0 \neq \infty$ – полюс порядка l функции $f(z)$. Найдите вычет функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}\,g(z)$ относительно z_0, если

   $a)$ $g(z_0) \neq 0$; $b)$ $g(z_0) = 0$.

4. Найдите вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки z_0, т.е. $\operatorname*{res}_{\gamma} \dfrac{f'(z)}{f(z)}$, если

   $a)$ $f(z) = \dfrac{\sin(z^2)}{z\,(z^2+1)^3}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pi$; $z_0 = -i$.

   $b)$ $f(z) = \dfrac{e^{z} - \cos z}{(1-\cos z)^2}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pi$; $z_0 = 2\pi$.

5. Найдите логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно контура γ, если

   $a)$ $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{(z^3+i)^2}$; $\gamma = \{|z| = 2\}$;

   $b)$ $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{e^z - 1}$; $\gamma = \{|z| = 9\}$.

6. Определите количество нулей полинома $P(z)$, расположенных в правой полуплоскости, если

   $a)$ $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$; $b)$ $P(z) = z^3 - 2z - 5$;

   $c)$ $P(z) = z^7 - 4z - 7$; $d)$ $P(z) = z^3 + 5z^2 + 9z + 5$.

7. Докажите, многочлен $P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots \alpha_1 z + 1$ $(\alpha_k \in \mathbf{C},\ |\alpha_k| = 1)$ не имеет корней внутри круга $\left\{|z| < \dfrac{1}{2}\right\}$.

8. Докажите, что существует лишь один корень уравнения $z\,e^{\lambda - z} = 1$, где $\lambda > 1$, отвечающий условию $|z| < 1$.

9. Найдите количество нулей многочлена $P(z)$ в области D, если

   $a)$ $P(z) = z^{10} - 6iz^7 + 2z^6 - z + i$, $D = \{\,|z| < 1\}$;

   $b)$ $P(z) = z^8 + iz^6 + z^4 - 12z^3 + 3z + 5$, $D = \{1 < |z| < 2\}$;

   $c)$ $P(z) = z^{12} + 6z^9 + iz^2 + 10$, $D = \{1 < |z| < 2\}$;

   $d)$ $P(z) = z^4 + 5iz^3 + (2+i)\,z + 1$, $D = \{|z| > 1\}$.