

Вопросы по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"  
(213-218 гр., 2017 г.)

Часть 1 (для тех, кто не сдал коллоквиум).

1. Основные понятия об обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ) и системах ОДУ. Примеры математических моделей: движение точки в пространстве, динамика популяции.
2. ОДУ в симметричном виде. Общий интеграл. Уравнение в полных дифференциалах (УПД), теорема об общем интеграле. Теорема о необходимом и достаточном условии того, что уравнение является УПД.
3. Задача Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Лемма Гронуолла-Беллмана. Теорема единственности решения задачи Коши.
4. Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной.
5. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения уравнения первого порядка, примеры.
6. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Понятие решения. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.
7. Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке.
8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения  $n$ -ого порядка на всем отрезке.
9. Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ  $n$ -ого порядка на всем отрезке.
10. Общие свойства линейного ОДУ  $n$ -ого порядка: замены переменных, принцип суперпозиции.
11. Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ  $n$ -ого порядка. Определитель Вронского. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.
12. ФСР для линейного однородного ОДУ  $n$ -ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ  $n$ -ого порядка.
13. Общее решение линейного неоднородного ОДУ  $n$ -ого порядка. Метод вариации постоянных.
14. Построение ФСР для линейного ОДУ  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами.
15. Построение дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка по известной системе функций. Формула Остроградского-Лиувилля.
16. Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ.
17. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Примеры.
18. Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.
19. Фундаментальная система решений (ФСР) для линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной системы ОДУ. Матрицант.
20. Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.
21. Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы.
22. Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы.

**Вопросы по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"**  
**(213-218 гр., 2017 г.)**  
**Часть 2 (для всех).**

1. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от правой части и начальных данных. Теорема сравнения (неравенство Чаплыгина).
2. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка от параметра.
3. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.
4. Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову. Теорема об асимптотической устойчивости точки покоя линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.
5. Теорема об устойчивости точки покоя линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Теорема о неустойчивости точки покоя линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.
6. Исследование устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова). Примеры.
7. Положительно определенные функции и их свойства. Метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова). Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.
8. Теорема Четаева о неустойчивости. Примеры.
9. Исследование траекторий в окрестности точки покоя линейной системы с постоянными коэффициентами. Классификация точек покоя линейной и нелинейной систем.
10. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка, редукция к дивергентному виду, определение решения краевой задачи. Тождество Лагранжа, формула Грина, лемма о связи определителя Вронского и коэффициентов ОДУ.
11. Функция Грина. Решение краевой задачи для неоднородного ОДУ с помощью функции Грина.
12. Существование и единственность функции Грина.
13. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора и ее свойства: простота, вещественность и неотрицательность собственных значений, линейная независимость собственных функций. Теорема Стеклова.
14. Первые интегралы (ПИ) нормальной системы ОДУ, производная в силу системы, геометрический смысл ПИ, представление решения задачи Коши с помощью функционально независимых ПИ.
15. Классификация УЧП, понятие решения УЧП. Характеристики линейного однородного УЧП. Общее решение линейного однородного УЧП.
16. Квазилинейное УЧП. Характеристики, общее решение, геометрический смысл квазилинейного УЧП.
17. Задача Коши для квазилинейного УЧП. Теорема существования и единственности ее решения.
18. Понятие функционала, вариация функции, вариация функционала. Примеры функционалов. Необходимое условие экстремума функционала.
19. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера в основной задаче вариационного исчисления.
20. Необходимое условие экстремума для функционалов, содержащих производные высших порядков. Необходимое условие экстремума в многомерных вариационных задачах.
21. Изопериметрическая задача на условный экстремум.
22. Вариационное свойство собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.