Глава 1.

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1. Сравнение поведения функций. О-символика

В этой, вводной, главе будет обсуждаться сравнительное поведение функций, а также асимптотическое поведение последовательностей.

1.1.1. Основные определения

Введем сначала основные определения (эти понятия частично уже известны из материала 1-го курса).

Пусть $\mathbb{R}$ – числовая прямая.

Определение 1. *Окрестностью (ϵ-окрестностью) точки* $x_0 \in \mathbb{R}$ называется множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$ – некоторое число.

Окрестность Ω называется *проколотой,* если сама точка x_0 ей не принадлежит.

Во многих случаях приходится рассматривать также *расширенную числовую прямую,* получаемую добавлением к $\mathbb{R}$ бесконечно удаленной точки.

Окрестностью точки $x_0 = \infty$ называется множество $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| > K\}$, где $K > 0$ – некоторое число.

Вводится понятие односторонней окрестности (полуокрестности).

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, ее *правой полуокрестностью* называется множество $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x_0 < x < x_0 + \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$ – некоторое число.

Иногда множество Ω^+ называют *окрестностью точки* x_0+

Если $x_0 = +\infty$, ее окрестностью называется множество $\{x \in \mathbb{R} : \ x > K\}$, где $K > 0$ – некоторое число.

Аналогично определяются левая полуокрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$, а также окрестность $x_0 = -\infty$.

Определение 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$.

Говорят, что *на множестве* $G \subset D$

$$f(x) = \mathcal{O}\Big(g(x)\Big), \quad x \in G$$

(читается: "о-большое от $g(x)$"), если существуют такая постоянная M, что при $x \in G$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)|\ .$$

Определение 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве D, а x_0 – предельная точка этого множества.

Говорят, что $\quad f(x) = o\Big(g(x)\Big) \quad$ *при* $x \to x_0$,
(читается: "о-малое от $g(x)$"), если существует такая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

для всех x из некоторой проколотой окрестности Ω точки x_0, $\Omega \subset D$.

Определение 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве D, а x_0 – предельная точка этого множества.

Эти функции *эквивалентны при* $x \to x_0$, если в некоторой проколотой окрестности точки x_0

$$f(x) = g(x) + o\Big(g(x)\Big)\,.$$

Данное соотношение кратко записывается следующим образом:
$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \ (x \in D)\,.$$

Замечания. 1) Соотношения, указанные в определениях 1 - 4, называются *отношениями порядка.*

2) В определении 2 в качестве множества G может выступать как все множество D, так и окрестность Ω точки x_0, принадлежащая D (как в определениях 3 - 4).

3) Отношения порядка из определений 3 - 4 следует рассматривать *только как предельные,* получающиеся в процессе стремления переменной x к предельной точке множества D. Иногда, если из контекста ясно, о какой предельной точке x_0 этого множества идет речь, запись $x \to x_0$ опускают, хотя и постоянно имеют ее в виду.

4) Отношение эквивалентности является примером так называемого *бинарного* отношения; оно обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности.

5) Равенства, указанные в определениях 2 - 3, не являются равенствами в обычном смысле, для них *не выполнено свойство симметрии.* А именно, когда мы говорим, например, что при $x \to x_0$ $f(x) = o\Big(g(x)\Big)$, это не значит, что $o\Big(g(x)\Big) = f(x)$.

Знак равенства в записях, использующих символы o или $\mathcal{O}$, понимается как *обозначение принадлежности функции* $f(x)$ *к некоторому множеству.*

1.1.2. Достаточные условия отношений порядка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве D, а x_0 – предельная точка этого множества. Здесь допускается возможность $x_0 = \infty$ (а также $x_0 = +\infty$ или $x_0 = -\infty$).

Легко доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,, \quad A \neq \infty\,,$$

то $f(x) = \mathcal{O}\Big(g(x)\Big), \quad x \to x_0\,.$

Утверждение 2. *Если существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

то $f(x) = o\Big(g(x)\Big), \quad x \to x_0\,.$

Утверждение 3. *Если существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,,$$

то $f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0\,.$

Замечания. 1) Условия, сформулированные в утверждениях 2 - 3, на практике обычно используют как *определения для "o"малого и эквивалентности* соответственно. Мы тоже будем в основном придерживаться этого варианта определений.

2) Условия утверждений 2 - 3 являются частными случаями утверждения 1.

3) Если в утверждении 1 значение предела $A \neq 0;\ \infty$, то одновременно $f(x) = \mathcal{O}\Big(g(x)\Big)$ и $g(x) = \mathcal{O}\Big(f(x)\Big)$, $x \to x_0$, (т.е. $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок при* $x \to x_0$).

Это соотношение записывают следующим образом:

$$f(x) = \mathcal{O}^*\Big(g(x)\Big), \quad x \to x_0\,.$$

Другая возможная запись: $f(x) \asymp g(x)\,, \quad x \to x_0\,.$

4) Из определений следует:

а) если $f(x) = \mathcal{O}(1), \quad x \to x_0\,,$ то функция $f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки $x_0\,;$

б) если $f(x) = o(1), \quad x \to x_0\,,$ то $f(x)$ – бесконечно малая функция в проколотой окрестности точки $x_0\,.$

1.1.3. Примеры

1. Доказать, что

a) $\sin x \sim x, \quad x \to 0\,;$ *b*) $\sin x = o(x), \quad x \to \infty\,;$ *c*) $\sin x = \mathcal{O}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$

$\triangleright$ *a*) Пусть $D = \mathbb{R}\,,$ $x_0 = 0\,,$ $f(x) = \sin x\,,$ $g(x) = x\,.$ Вычислим

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

В соответствии с утверждением 3 получаем $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

b) Если $x_0 = \infty\,,$ то $\sin x = o(x)\,, \quad x \to \infty\,,$ поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,.$$

c) Пусть по-прежнему $D = \mathbb{R}\,.$ Известно, что

$$|\sin x| \le |x| \;\; \forall x\,.$$

Отсюда по определению 2 следует $\sin x = \mathcal{O}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ◀

2. Доказать, что для $m,\, n \in \mathbb{N}\,,$ $m < n\,,$

a) $x^n = o\Big(x^m\Big), \quad x \to 0\,;$ *b*) $x^m = o\Big(x^n\Big), \quad x \to +\infty\,.$

$\triangleright$ Пусть D – числовая полуось $x > -1$, $f(x) = x^m$, $g(x) = x^n\,,$ $m < n\,.$

a) Если $x_0 = 0\,,$ то $x^n = o\Big(x^m\Big), \quad x \to 0\,,$ так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0\,.$$

$b)$ Указанное равенство справедливо, потому что для $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0 \quad ◀$$

В дальнейшем мы будем указывать лишь точку x_0 , потому что множество D обычно ясно из контекста.

3. Доказать, что при $x \to 0$:

$a)$ $f(x) \asymp g(x)$, где $f(x) = x \left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$;

$b)$ $f(x) = o(g(x))$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \,, \ x \in \mathbb{Q} \,, \\ 0 \,, \ x \in \mathbb{I} \,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \,, \ x \in \mathbb{Q} \,, \\ 0 \,, \ x \in \mathbb{I} \,. \end{cases}$$

(Здесь $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ обозначают множества рациональных и иррациональных чисел соответственно).

▷ $a)$ Так как

$$1 \le \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| \le 3 \,,$$

то $|f(x)| = |x| \cdot \left|2 + \sin\dfrac{1}{x}\right| \le 3\,|x|$ и одновременно $|x| \le |f(x)|$.

Отсюда, согласно определению 2, следует $f(x) = \mathcal{O}\Big(g(x)\Big)$ и $g(x) = \mathcal{O}\Big(f(x)\Big)$, т.е. $f(x) \asymp g(x)$.

Заметим при этом, что отношение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела при $x \to 0$ ◀

▷ $b)$ Очевидно, $f(x) = x \cdot g(x)$. Поскольку $\alpha(x) = x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$, то по определению 3 $f(x) = o(g(x))$.

В то же время, как и в a), не существует предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, так как знаменатель дроби обращается в нуль в точках, сколь угодно близких к $a=0$ ◀

Эти два примера показывают, что понятия O-большого и o-малого, основанные на утверждениях 1 и 2, не равносильны исходным определениям 2 и 3 соответственно.

Очень часто проводится сравнение поведения данной функции $f(x)$ со *степенной функцией*, т.е. $g(x)=x^{\alpha}$.

4. a) Доказать, что

$$\frac{x^2+1}{x-2}=\mathcal{O}(x),\quad x\to\infty\,.$$

▷ Требуемое равенство справедливо, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=1\,.$$

Точнее, мы получили утверждение, что

$$\frac{x^2+1}{x-2}\sim x,\quad x\to\infty \qquad ◀$$

b) Исследовать асимптотическое поведение функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}\sin 3x$ при $x\to 0$.

▷ Для сравнения возьмем степенную функцию $g(x)=C\,x^{\alpha}$ $(C\neq 0)$ и вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-2}\cdot\frac{\sin 3x}{C\,x^{\alpha}}=-\frac{1}{2C}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^{\alpha}}\,.$$

Последний предел существует и не равен нулю только при $\alpha=1$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{2C}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=-\frac{3}{2C}=1$$

при $C = -\dfrac{3}{2}$, следовательно, $f(x) \sim -\dfrac{3}{2}\,x\,, \quad x \to 0$ ◀

5. Аналогично примеру 1 a) можно провести сравнения для основных элементарных функций. Таким образом, получается известная из начального курса математического анализа *таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$:*

$$
\begin{gathered}
e^x - 1 \sim x\,,\\
\ln(1+x) \sim x\,,\\
(1+x)^a - 1 \sim a \cdot x\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,\\
\sin x \sim x\,,\\
1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\,,\\
\operatorname{tg}\, x \sim x\,,\\
\arcsin\, x \sim x\,,\\
\operatorname{arctg}\, x \sim x\,.
\end{gathered}
$$

Эти соотношения остаются в силе, если в них заменить x на некоторую бесконечно малую функцию $\alpha(x)\,:\,\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

6. Используя таблицу эквивалентностей, решим задачу из $4\,b$).

▷
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}\,\sin 3x \sim -\frac{1}{2}\,\sin 3x \sim -\frac{3}{2}\,x$$
при $x \to 0$ ◀

7. Верно ли утверждение: $x^2 = o\,\left(f(x)\right)\,, \quad x \to 0\,,$ если
a) $f(x) = x\,\sin 2x\,;$ *b*) $f(x) = x\,\cos(x^2)\,;$
c) $f(x) = 5\sqrt[5]{x}\,\ln(1-x)\,;$ *d*) $f(x) = \dfrac{1}{x}\,\operatorname{arctg}(x^2)\,?$

Ответ: $a)$ неверно ; $b) - d)$ верно.

$\triangleright$ Для случая $a)$ имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \neq 0\,,$$

поэтому предлагаемое утверждение неверно.

Справедливость $b)$ следует из того, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos(x^2)} = 0\,.$$

В случае $c)$ получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{5\sqrt[5]{x}\,\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{5\sqrt[5]{x}\,(-x)} =$$

$$= -\frac{1}{5}\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x^4} = 0\,,$$

т.е. утверждение верно.

$d)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x^2}{\operatorname{arctg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x^2}{x^2} = 0\,,$$

поэтому утверждение верно ◀

8. Верно ли утверждение: $f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\,,\ x\to\infty\,,$ если

$a)$ $f(x) = x\,\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$; $b)$ $f(x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}(x^2)\,;$

$c)$ $f(x) = (2x+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$; $d)$ $f(x) = \frac{2+x}{3x-10}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$?

Ответ: Верны $a) - c)$, неверно $d)$.

$\triangleright$ Равенство $a)$ верно, поскольку существует

$$\lim_{x\to\infty} f(x) : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \left\{y = \frac{3}{x^2}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} 3\, \frac{\ln(1+y)}{y} = 3\,.$$

В случае $b)$ поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg}(x^2) = 0\,,$$

поэтому $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, значит, и $f(x) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$.

Утверждение в случае $c)$ верно, так как

$$\lim_{x\to\infty} f(x) : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x\ (2x+1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2x+1)}{x^2} = 2\,.$$

Здесь мы учли, что $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{x^2}$, $x \to \infty$.

В случае $d)$ имеем

$$\lim_{x\to\infty} f(x) : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+x)}{3x-10} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x+2}{3x-10} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \infty\,,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{3x-10} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\,,$$

поэтому утверждение неверно $\blacktriangleleft$

9. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ в проколотой окрестности точки $x = 0$. Надо проверить, какие из следующих ниже утверждений верны, а какие – нет (при $x \to 0$) :

(a) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = o(1)\,,$

(b) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(1)\,,$

(c) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = o(x)\,,$

(d) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(x)\,,$

(e) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = o(x^2)\,,$

(f) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(x^2)\,,$

(g) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} \sim x\,,$

(h) $x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x} \sim x^2\,.$

Ответ: Верны $(a)-(d), (f)$. Неверны $(e), (g), (h)$.

$\triangleright$ Например, справедливость (c) и (d) следует из того, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0\,.$$

Равенство (f) следует из оценки $|f(x)| \le x^2\,.$

Соотношение (e) неверно, так как $\dfrac{f(x)}{x^2} = \sin\dfrac{1}{x}$ не является бесконечно малой функцией при $x \to 0$ (не имеет предела) ◀

1.1.4. Вопросы и задачи

1. Докажите утверждения 1 - 3.

2. Приведите примеры, показывающие, что условия утверждений 1 - 3 не являются необходимыми.

3. Приведите примеры функций $f(x)$, для которых справедливо

$a)$ $f(x)=o\,(x),\quad x\to 0\,;$ $b)$ $f(x)=\mathcal{O}(x),\quad x\to 0\,;$
$c)$ $f(x)=o\,(x),\quad x\to 5\,;$ $d)$ $f(x)=\mathcal{O}(x),\quad x\to 5\,;$
$e)$ $f(x)=o(x),\quad x\to\infty\,;$ $f)$ $f(x)=\mathcal{O}(x),\quad x\to\infty\,;$
$g)$ $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad x\to 0\,;$ $h)$ $f(x)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad x\to 0\,;$
$i)$ $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\to\infty\,;$ $j)$ $f(x)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\to\infty\,.$

4. Верно ли утверждение: $x^3=o\,\left(f(x)\right)\,,\quad x\to 0\,,$ если
$a)$ $f(x)=x\,;$ $b)$ $f(x)=x^4\,;$
$c)$ $f(x)=x^2\,\sqrt[3]{x}\,;$ $d)$ $f(x)=(x+1)^2\,;$
$e)$ $f(x)=(x\,\operatorname{arctg}|x|)^2\,;$ $f)$ $f(x)=(x\,\cos x)^2\,?$

5. Верно ли утверждение: $\dfrac{1}{x^2}=\mathcal{O}\,\left(f(x)\right)\,,\ x\to\infty\,,$ если

$a)$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\,\left(e^{|x|}+9\right)\,;$ $b)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\,;$
$c)$ $f(x)=x\cdot\sin\left(\dfrac{2}{x^2}\right)\,;$ $d)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\,;$
$e)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\,;$ $f)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}(x^2+3)\,;$
$g)$ $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+4}\,?$

6. Проверьте справедливость эквивалентностей из примера 5.

7. Для функции $f(x)=x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ проверьте, какие из восьми утверждений примера 9 верны, а какие – нет, если $x\to\infty\,.$

1.2. Действия с отношениями порядка

1.2.1. Основное утверждение

Теорема 1. *Пусть функция $f = f(x)$ определена на некотором множестве D. Пусть x_0 – предельная точка этого множества, причем функция $f(x)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0). Тогда при $x \to x_0$ имеют место следующие утверждения:*

$$1)\quad o(f) + o(f) = o(f)\,;$$

$$2)\quad \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)\,;$$

$$3)\quad \mathcal{O}(f) + o(f) = \mathcal{O}(f)\,;$$

$$4)\quad o(o(f)) = o(f)\,;$$

$$5)\quad \mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f)\,;$$

$$6)\quad \mathcal{O}(o(f)) = o(f)\,;$$

$$7)\quad o(\mathcal{O}(f)) = o(f)\,.$$

$\triangleright$ Докажем, например, первые два соотношения:

$$1)\quad o(f) + o(f) = o(f).$$

Для левой части $F(x) = g_1(x) + g_2(x)$ доказываемого равенства, где $g_1(x) = o(f(x))$, $g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$, имеем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = 0\,,$$

так как

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_i(x)}{f(x)} = 0 \quad (i = 1, 2)\,.$$

Следовательно, $F(x) = o(f(x))$, что и требовалось доказать.

2) Пусть $F(x) = g_1(x) + g_2(x)$, где

$$|g_1(x)| \le M_1\ |f(x)|\,,\ \ |g_2(x)| \le M_2\ |f(x)|\,, \quad M_1,\, M_2 > 0\,,$$

для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда для этих значений x

$$|F(x)| \le |g_1(x)| + |g_2(x)| \le M_1\ |f(x)| + M_2\ |f(x)| =$$

$$= (M_1 + M_2)\ |f(x)| = M\ |f(x)|\,, \quad M = M_1 + M_2 > 0\,,$$

что и требовалось доказать.

Остальные соотношения доказываются аналогичным образом ◀

Замечания. 1) Все равенства в утверждении теоремы 1 читаются слева направо (см. также замечание 5) п. 1.1.1).

2) Обратите внимание на то, что имеют место соотношения

$$o(f) - o(f) = o(f),$$

$$\mathcal{O}(f) - \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)\,,$$

т.е. в правой части не нуль.

1.2.2. Сравнения со степенной функцией

Как было отмечено выше, часто приходится сравнивать поведение функций при $x \to x_0$ со степенями $(x - x_0)^n$. При этом говорят, что *бесконечно малая* $(x - x_0)^n$, $n > 0$, *имеет порядок* n.

Если $x \to \infty$, то функция x^n, $n > 0$, является *бесконечно большой порядка* n.

Если имеет место равенство

$$f(x) = C_n(x - x_0)^n + C_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots +$$

$$+C_{n+k}(x-x_0)^{n+k}+o((x-x_0)^{n+k})\,, \quad x\to x_0 \quad (\,C_n\neq 0\,),$$

то выражение $C_n(x-x_0)^n$ называется *главным членом,* а $o((x-x_0)^{n+k})$ – *остаточным членом* асимптотического представления $f(x)$ при $x\to x_0$.

Замечание. Остаточный член может иметь другой вид, например, $\mathcal{O}\left((x-x_0)^{n+k}\right)$.

Полезные соотношения (частные случаи сформулированных в теореме 1 утверждений) дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть на некотором множестве D, для которого x_0 – предельная точка, определена бесконечно малая функция $\alpha=\alpha(x)$: $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, причем функция $\alpha(x)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0). Пусть $m\,,n\in\mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ \ o(\alpha^n)=o(\alpha^m)\,, \quad m\le n\,;$$

$$2)\ \ \mathcal{O}(\alpha^n)=\mathcal{O}(\alpha^m)\,, \quad m\le n\,;$$

$$3)\ \ o(\alpha^m)+o(\alpha^n)=o(\alpha^m)\,, \quad m\le n\,;$$

$$4)\ \ \mathcal{O}(\alpha^m)+\mathcal{O}(\alpha^n)=\mathcal{O}(\alpha^m)\,, \quad m\le n\,;$$

$$5)\ \ o(\alpha^m)\cdot o(\alpha^n)=o(\alpha^{m+n})\,;$$

$$6)\ \ \mathcal{O}(\alpha^m)\cdot \mathcal{O}(\alpha^n)=\mathcal{O}(\alpha^{m+n})\,;$$

$$7)\ \ (o(\alpha))^n=o(\alpha^n)\,;$$

$$8)\ \ (\mathcal{O}(\alpha))^n=\mathcal{O}(\alpha^n)\,;$$

$$9)\ \ \alpha\cdot o(\alpha^n)=o(\alpha^{n+1})\,;$$

$$10)\ \ \alpha\cdot \mathcal{O}(\alpha^n)=\mathcal{O}(\alpha^{n+1})\,;$$

$$11)\ \ \frac{o(\alpha^n)}{\alpha}=o(\alpha^{n-1})\,, \quad n>1\,;$$

$$12)\quad \frac{\mathcal{O}(\alpha^n)}{\alpha} = \mathcal{O}(\alpha^{n-1})\,, \quad n > 1\,.$$

Замечание. Аналогичные утверждения можно сформулировать для бесконечно больших функций.

1.2.3. Примеры

1. Найти главный член асимптотического представления следующих функций:

a) $f(x) = 2x^3 + x^4$ при $x \to 0$;

b) $f(x) = 2x^3 + x^4$ при $x \to \infty$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x^3 + 5}$ при $x \to 0$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{2x^3 + 5}$ при $x \to \infty$.

a) *Ответ:* $2x^3$.

$\triangleright$ При $x \to 0$ $\quad f(x) = 2x^3 + x^4 = 2x^3 + o(x^3)$ $\blacktriangleleft$

b) *Ответ:* x^4.

$\triangleright$ При $x \to \infty$

$$f(x) = 2x^3 + x^4 = x^4 \left(1 + \frac{2}{x}\right) = x^4 + o\left(x^4\right) \quad \blacktriangleleft$$

c) *Ответ:* $\dfrac{x}{5}$.

$\triangleright$ При $x \to 0$ получаем $f(x) = \dfrac{x}{2x^3 + 5} = \dfrac{x}{5}\left(1 + \dfrac{2}{5}x^3\right)^{-1}$

$$= \frac{x}{5}\left(1 - \frac{2}{5}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{x}{5} + \mathcal{O}(x^4) \quad \blacktriangleleft$$

d) *Ответ:* $\dfrac{1}{2x^2}$.

$\triangleright$ Для $x \to \infty$ имеем $\dfrac{1}{x} \to 0$, поэтому

$$f(x) = \frac{x}{2x^3 + 5} = \frac{x}{2x^3}\left(1 + \frac{5}{2x^3}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2x^2}\left(1 - \frac{5}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^5}\right) \qquad \blacktriangleleft$$

При решении $c) - d)$ использовано равенство

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + o(x)\,, \quad x \to 0\,.$$

2. Найти асимптотические представления при $x \to 0$ с точностью до членов второго порядка включительно следующих функций:

$a)$ $f(x) = \cos x\,;$ $\quad b)$ $f(x) = e^x\,.$

$\triangleright$ $a)$ Докажем,что при $x \to 0$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\,.$ Для этого вычислим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1\,.$$

Следовательно, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,,\ x \to 0\,.$$

Можно показать, что остаточный член имеет вид $o(x^3)$, или, еще точнее, $\mathcal{O}(x^4)$ $\quad\blacktriangleleft$

$\triangleright$ $b)$ Уже известно, что $e^x - 1 \sim x\,,\quad x \to 0\,.$ Используя первое правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}\,.$$

Поэтому при $x \to 0$ имеем $e^x - 1 - x \sim \dfrac{x^2}{2}$, т.е.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \blacktriangleleft$$

3. Найти асимптотическое разложение при $x \to 0$ функции $f(x) = \sin x$, выписывая члены до третьего порядка включительно.

$\triangleright$ Известно, что $\sin x \sim x$, при $x \to 0$, т.е. $\sin x - x = o(x)$. Найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = 0\,.$$

Это означает, что $\sin x - x = o(x^2)$. Теперь найдем предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

(при вычислении пределов использовались правило Лопиталя и результат примера **2**a)).

Последнее равенство означает, что $\sin x - x = \mathcal{O}\left(x^3\right)$, а точнее

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \qquad \blacktriangleleft$$

1.2.4. Уточнение основных разложений

Полученные в примерах 1 - 2 результаты уточняют таблицу эквивалентностей из п.5 раздела 1.1.3.

Приведем более точную *таблицу асимптотических разложений* основных элементарных функций при $x \to 0$ (ее следует запомнить):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\,;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\,;$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}\,x^2 + \mathcal{O}(x^3)\,;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\,;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\,;$$
$$\operatorname{tg}\, x = x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\,;$$
$$\arcsin\, x = x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\,;$$
$$\operatorname{arctg}\, x = x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\,;$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\,;$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\,.$$

1.2.5. Случай числовых последовательностей

Для пары числовых последовательностей $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, так же, как это сделано выше для функций, можно ввести отношения порядка при $n \to \infty$ (т.е. понятия о-малое, О-большое, эквивалентность). Аналогичный смысл имеют понятия асимптотического представления (разложения), главного и остаточного членов.

Рассмотрим **примеры.**

Найти главный член асимптотического представления при $n \to \infty$ следующих последовательностей:

$a)$ $f_n = \dfrac{a}{bn + c}$; $\quad a, b \neq 0$; $\qquad b)$ $f_n = \dfrac{n^2}{2n^5 + n^3 - 1}$;

$c)$ $f_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3}$; $\qquad d)$ $f_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \operatorname{ch} \dfrac{1}{n}$;

$e)$ $f_n = \dfrac{n^2 \operatorname{arctg} n}{n^3 + 2}$; $\qquad f)$ $f_n = \dfrac{n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{n^3 + 2}$.

$\triangleright$ При $n \to \infty$ последовательность $\dfrac{1}{n}$ является бесконечно малой, поэтому мы будем использовать таблицу асимптотических разложений основных элементарных функций 1.2.4.

$$a) \quad f_n = \frac{a}{bn+c} = \frac{a}{bn}\ \frac{1}{1+\frac{c}{bn}} = \frac{a}{bn}\ \left(1+\frac{c}{bn}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{a}{bn}\ \left(1-\frac{c}{bn}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{a}{bn}\ +\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .$$

Таким образом, заменяя при $n \to \infty$ выражение $f_n = \dfrac{a}{bn+c}$ на $\dfrac{a}{bn}$, мы совершаем ошибку, которая имеет порядок $\dfrac{1}{n^2}$ ◀

$$\triangleright\ b) \quad f_n = \frac{n^2}{2n^5+n^3-1} = \frac{n^2}{2n^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^5}} = \frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\ ,$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^5}\right) = 1 \qquad ◀$$

▷

$$c) \quad f_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3} = \frac{n^2+1-n^2+3}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}} =$$

$$= \frac{4}{n}\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}} = \frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ ,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\ \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}\right) = 2\,.$$

Приведем теперь более общий способ решения этого примера:

$$f_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3} = n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= n \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1 - \frac{3}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) =$$

$$= n \cdot \left(\frac{2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty \quad \blacktriangleleft$$

$\triangleright$

$$d) \ f_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \operatorname{ch}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) - \left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \to \infty \quad \blacktriangleleft$$

$\triangleright$

$$e) \quad f_n = \frac{n^2 \operatorname{arctg} n}{n^3 + 2} = \frac{1}{n}\,\frac{\operatorname{arctg} n}{1 + \frac{2}{n^3}} = \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как $\operatorname{arctg} n \to \dfrac{\pi}{2}$ для $n \in \mathbb{N}, n \to \infty$ $\quad \blacktriangleleft$

$\triangleright$

$$f) \quad f_n = \frac{n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{n^3 + 2} = \frac{n^2 \ \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^3 + 2} =$$

$$= \frac{n \ (1 + o(1))}{n^3 \ \left(1 + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty \quad \blacktriangleleft$$

1.2.6. Вопросы и задачи

1. Докажите утверждения теоремы 1.

2. Докажите утверждения теоремы 2.

3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для $x \to \infty$ имеют место равенства:

$$a) \ \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n), \quad m \le n;$$

$$b) \ \mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n), \quad m \le n;$$

$$c) \ \mathcal{O}(x^m) \cdot \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{m+n}).$$

4. Найдите асимптотическое разложение при $x \to 0$ функции $f(x)$, выписывая члены до второго порядка включительно:

$a)$ $f(x) = \ln(1+x)$; $b)$ $f(x) = a^x - 1 \quad (a > 0)$.

5. Найдите главный член асимптотического представления следующих функций:

$a)$ $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x^2 + 1}$ при $x \to 0$;

$b)$ $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x^2 + 1}$ при $x \to \infty$;

$c)$ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x^2 + 4x + 1}$ при $x \to 0$;

$d)$ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x^2 + 4x + 1}$ при $x \to +\infty$;

$e)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^2}{1 + x^2}$ при $x \to 0$;

$f)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^2}{1 + x^2}$ при $x \to \infty$.

6. Определите порядок бесконечно малой при $x \to 0$ функции $f(x)$:

$a)$ $f(x) = x - \sin\sqrt{|x|}$; $b)$ $f(x) = \operatorname{tg}^2(2x^2) - 3x^5$;

$c)$ $f(x) = \sqrt{1 - 2x^4} + x^4 - 1$; $d)$ $f(x) = x\cos x + \ln(1-x)$;

$e)$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln(\cos x)$; $f)$ $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} - \sqrt{\cos x}$.

7. Найти главный член асимптотического представления при $n \to \infty$ следующих последовательностей:

$a)$ $f_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1} - \dfrac{2}{n}$; $b)$ $f_n = \sqrt{n + \sqrt{n}}$;

$c)$ $f_n = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$; $d)$ $f_n = 1 - \sqrt[5]{\cos\dfrac{1}{n}}$;

$e)$ $f_n = \operatorname{ch}\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n}$; $f)$ $f_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$.

1.3. Шкала роста (убывания) основных элементарных функций и последовательностей

1.3.1. Сравнение асимптотического поведения основных функций

Рассмотрим на множестве $D = \{x : \ x > 0\}$ несколько возрастающих функций и изучим их поведение при $x \to +\infty$.

Утверждение 1. *Для функций из таблицы*

$$\ln^\alpha x \qquad (\alpha > 0)$$

$$x^k \qquad (k > 0)$$

$$a^x \qquad (a > 1)$$

имеет место равенство

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to +\infty,$$

если функция $f(x)$ *в этой таблице предшествует* $g(x)$.

Замечание. Приведенная выше таблица (которую мы назовем *шкалой роста*) может быть продолжена и вверх, и вниз.

Например,

$$\ln \ln x = o(\ln x), \quad x \to +\infty,$$

$$a^x = o\Big(a^{b^x}\Big), \quad x \to +\infty, \quad \text{если} \quad a, b > 1.$$

Доказательство утверждения 1 проводится вычислением соответствующих пределов.

$\triangleright$ Например,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^k} = 0 \quad \text{при} \quad k > 0 \quad \text{и любом} \quad \alpha.$$

Действительно, при $\alpha \le 0$ результат очевиден, а для $\alpha > 0$ предел можно вычислить, используя правило Лопиталя.

Остальные соотношения доказываются аналогичным образом ◀

Рассмотрим на том же множестве $D = \{x : \ x > 0\}$ при $x_0 = 0+$ несколько убывающих функций и составим *шкалу убывания.*

Утверждение 2. *Для функций из таблицы*

$$a^{\frac{1}{x}} \quad (0 < a < 1)$$

$$x^k \quad (k > 0)$$

$$\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\alpha < 0)$$

имеет место равенство

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to 0+,$$

если функция $f(x)$ в этой таблице предшествует $g(x)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 1.

1.3.2. Случай числовых последовательностей

Рассмотрим далее несколько числовых последовательностей, которые являются дискретными аналогами элементарных функций.

Утверждение 3. *Имеет место следующая шкала роста числовых последовательностей:*

$$\ln^{\alpha} n \quad (\alpha > 0)$$

$$n^k \quad (k > 0)$$

$$a^n \qquad (a>1)$$
$$n!$$

где
$$f_n = o\,(g_n)\,, \quad n \to \infty\,,$$
если последовательность $\{f_n\}$ *в этой таблице предшествует* $\{g_n\}$.

$\rhd$ Доказательство также проводится вычислением соответствующих пределов. Заметим только, что эта шкала дополнена последовательностью $\{n!\}$ ◀

Замечание. Таблицы, приведенные в утверждениях 2 - 3, также могут быть продолжены и вверх, и вниз.

1.3.3. Простейшее неравенство как следствие отношения порядка

Сформулируем далее два очевидных утверждения.

Лемма 1. *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$, *определены на некотором множестве* D, *имеющем предельную точку* x_0. *Если* $f(x) = o\Big(g(x)\Big)$, $x \to x_0$, *то существует проколотая окрестность точки* x_0, *в которой* $|f(x)| < |g(x)|$.

$\rhd$ По условию леммы существует такая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\alpha(x)$, что
$$f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$$
для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Но так как
$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0\,,$$
то в достаточно малой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $|\alpha(x)| < 1$, откуда и вытекает утверждение леммы ◀

Соответствующее утверждение верно для числовых последовательностей, а именно:

Лемма 2. *Если члены числовых последовательностей* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$ *при* $n \to \infty$ *связаны соотношением* $f_n = o(g_n)$, *то существует такое число* N , *что для всех* $n > N$ *справедливо неравенство* $|f_n| < |g_n|$.

1.3.4. Примеры

1. Какая из функций принимает бóльшие значения при достаточно больших значениях x :

$a)$ $f(x) = 10^6\, x^3$ или $g(x) = 10^{-6}x^4$;

$b)$ $f(x) = \ln(x^{300} + 1)$ или $g(x) = \sqrt[10]{x}$?

$\triangleright$ $a)$ Существует такое число $A > 0$, что $f(x) < g(x) \quad \forall x > A$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10^6 x^3}{10^{-6}x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10^{12}}{x} = 0\,,$$

поэтому $f(x) = o(g(x))$, $x \to +\infty$, и ответ следует из леммы 1 п. 1.3.3 $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ $b)$ При достаточно больших значениях x справедливо $f(x) < g(x)$, так как $f(x) = o(g(x))$, $x \to +\infty$, потому что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{300}+1)}{\sqrt[10]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{300\ \ln x}{\sqrt[10]{x}} = 0$$

(см. шкалу роста из утверждения 1) $\blacktriangleleft$

2. Выяснить, что больше при достаточно больших значениях n :

$a)$ $f_n = \ln^{500} n$ или $g_n = n^{0.001}$;

$b)$ $f_n = \ln^{25} n$ или $g_n = (0.95)^n$;

$c)$ $f_n = \sqrt[n]{n^{100}}$ или $g_n = \sqrt[100]{n}$;

$d)$ $f_n = (\ln n)^{\ln n}$ или $g_n = n^{10}$?

$\triangleright$ *a*) Существует такое число n_0, что $\forall n > n_0$ выполнено неравенство
$\ln^{500} n < n^{0.001}$, так как $f_n = o(g_n)$, $n \to \infty$, что следует из утверждения 3.

b) При $n \to \infty$ последовательность $f_n \to \infty$, а $g_n \to 0$, поэтому $\ln^{25} n > (0.95)^n$ $\forall n > n_0$.

c) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{100} = 1$. В то же время при $n \to \infty$ последовательность $g_n = \sqrt[100]{n} \to \infty$, значит, $g_n > f_n$ $\forall n > n_0$.

d) Преобразуем выражение f_n, используя основное логарифмическое тождество:

$$f_n = e^{\ln n \cdot \ln \ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln \ln n} = n^{\ln \ln n}.$$

Поскольку последовательность $\{\ln \ln n\}$ бесконечно большая, найдется такое число n_0, что $\ln \ln n > 10$ $\forall n > n_0$. Значит, $f_n > g_n$, если $n > n_0$ $\blacktriangleleft$

3. Найти, для каких значений α и β при достаточно больших n справедливо неравенство

$$n^\alpha < \ln^\beta n.$$

Ответ: 1) Если $\alpha < 0$, то β – любое; 2) если $\alpha = 0$, то $\beta > 0$.

$\triangleright$ 1) Пусть $\alpha < 0$. Тогда для $\beta \geq 0$ неравенство очевидно. Если $\beta < 0$, то согласно шкале роста числовых последовательностей $\ln^{-\beta} n = o\left(n^{-\alpha}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $-\alpha > 0$, $-\beta > 0$). Поэтому

$$\ln^{-\beta} n < n^{-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad n^\alpha < \ln^\beta n \quad \forall n > n_0.$$

2) Пусть $\alpha = 0$. Тогда, очевидно, для $n \geq 3$

$$\ln^\beta n > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 0\,.$$

3) Пусть $\alpha > 0$. Тогда по шкале роста числовых последовательностей

$$\ln^\beta n = o\,(n^\alpha)\;, \quad n \to \infty\,,$$

для $\beta > 0$, тем более для $\beta \leq 0$. Следовательно, при любых значениях β справедливо $\ln^\beta n < n^\alpha \quad \forall n > n_0$, т.е. данное в условии неравенство не выполнено при $\alpha > 0$ ◀

1.3.5. Несколько полезных неравенств

С помощью шкалы роста (убывания) для функций или последовательностей и леммы из 1.3.3 можно легко получить ряд неравенств, которые полезны при исследовании сходимости несобственных интегралов. Такие неравенства мы будем также использовать в дальнейшем (см. главу 2) при исследовании рядов. Приведем несколько результатов для числовых последовательностей.

1. *Пусть α – произвольное фиксированное число, $\beta > 0$. Тогда найдется такое натуральное число N (зависящее от $\alpha\,,\beta$), что для всех $n > N$ справедливо неравенство*

$$\frac{\ln^\alpha\; n}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{n^{1+\frac{\beta}{2}}}\,.$$

▷ Заметим, что

$$\frac{\ln^\alpha\; n}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{n^{1+\frac{\beta}{2}}} \;\Leftrightarrow\; \ln^\alpha\; n < n^{\frac{\beta}{2}}\,.$$

Поскольку $k = \dfrac{\beta}{2} > 0$, учитывая, что

$$\ln^\alpha\; n = o\left(n^k\right)\;, \quad n \to \infty\,,$$

по лемме 2 получаем $\ln^{\alpha} n < n^k$ для $n > N$ ◀

2. *Пусть α – произвольное фиксированное число, $\beta > 0$. Тогда найдется такое натуральное число $N = N(\alpha, \beta)$, что для всех $n > N$ справедливо неравенство*

$$\frac{\ln^{\alpha} n}{n^{1-\beta}} > \frac{1}{n^{1-\frac{\beta}{2}}}.$$

Доказательство аналогично.

3. *Пусть k – произвольное фиксированное число. Тогда*

$$n^k \cdot e^{-n} < \frac{1}{n^2} \quad \textit{для всех} \;\; n > N, \quad \textit{где} \;\; N = N(k).$$

1.3.6. Вопросы и задачи

1. Докажите утверждение 2 п. 1.3.1.

2. Докажите утверждение 3 п. 1.3.2.

3. Выясните, что больше при достаточно больших значениях x :

$a)$ $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ или $g(x) = x \ln x$;

$b)$ $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x} + 10}$ или $g(x) = x \ln x$;

$c)$ $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ или $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

$d)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ или $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$?

4. Выясните, что больше при $x \to 0+0$, т.е. в достаточно малой правой полуокрестности точки $x_0 = 0$:

$a)$ $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ или $g(x) = x \ln \dfrac{1}{x}$;

$b)\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}+10}$ или $g(x)=x\ \ln\dfrac{1}{x}$;

$c)\ f(x)=x\ \sin\dfrac{1}{x+1}$ или $g(x)=\sqrt[3]{x}$;

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ или $g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{1}{x}$?

5. Выясните, что больше при достаточно больших значениях n :

$a)\ n^{100^{100}}$ или $(1.001)^n$; $b)\ 100^n$ или $n!$;

$c)\ n^n$ или $n!$; $d)\ \ln\sqrt[k]{n}$ или $\sqrt[k]{\ln n}$, $k\in\mathbb{N}$;

$e)\ (\ln\ln n)^{\ln n}$ или n^2; $f)\ (\ln n)^{\ln\ln n}$ или n ?

6. Найдите, для каких значений $a>0$ и b при достаточно больших n справедливо неравенство

$a)\ a^{bn}<n^2$; $b)\ \ln^b n<a^n$; $c)\ \ln^b n>a^n$?

7. Докажите неравенства 2 и 3 п. 1.3.5.

1.4. Асимптотические разложения основных элементарных функций

В заключение вводной главы напомним асимптотические представления основных элементарных функций, полученные в начальном курсе анализа. Они уточняют приведенную в п. 1.2.4 таблицу. Итак, согласно формуле Тейлора-Маклорена, в некоторой окрестности точки $x_0=0$ для любого фиксированного значения $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства:

1.

$$e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathcal{O}\Big(x^{n+1}\Big)$$

2.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\mathcal{O}\Big(x^{2n+1}\Big)$$

3.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \ \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}\Big(x^{2n+2}\Big)$$

4.

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}\Big(x^{2n+1}\Big)$$

5.

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}\Big(x^{2n+2}\Big)$$

6.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \ \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}\Big(x^{n+1}\Big)$$

7.

$$(1+x)^a = 1 + a \ x + \frac{a \ (a-1)}{2!} \ x^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{a \ (a-1) \cdots (a-n+1)}{n!} \ x^n + \mathcal{O}\Big(x^{n+1}\Big)$$

Глава 2.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия. Свойства числовых рядов

2.1.1. Определения

Рассмотрим последовательность действительных чисел $\{a_n\}$.

Определение 1. Выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *числовым рядом.*

Числа $a_1,\ a_2,\ \cdots a_n, \cdots$ называются *членами ряда.*

Определение 2. Конечная сумма

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *n-й частичной суммой* ряда (1).

Заметим, что числовым рядом (1) последовательность $\{s_n\}$ определена однозначно. Обратно, по заданной последовательности чисел $\{s_n\}$ однозначно определяется ряд, для которого $\{s_n\}$ является последовательностью частичных сумм:

$$a_1 = s_1; \quad a_k = s_k - s_{k-1} \ (k > 1).$$

Определение 3. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Число $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ называется *суммой ряда*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Если последовательность $\{s_n\}$ расходится, ряд (1) называется *расходящимся.*

Определение 4. Выражение

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется *n-м остатком ряда.*

Если ряд сходится к сумме s , то $r_n = s - s_n$.

Примеры.

Исходя из *определения*, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$.

Ответ: ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, т.е. когда это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$\triangleright$ Используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии, найдем для данного ряда частичную сумму: $s_n = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$.

1) Если $|q| < 1$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} ,$$

т.е. ряд сходится и имеет сумму $s = \dfrac{1}{1 - q}$.

2) При $|q| > 1$ не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, т.е. ряд расходится.

3) Если $q = -1$, имеем ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ,$$

для которого $s_{2n-1} = 1$, $s_{2n} = 0$. Ряд расходится, так как у последовательности $\{s_n\}$ две предельные точки: 0; 1.

4) Если $q = 1$, получаем ряд

$$1 + 1 + 1 + \cdots ,$$

у которого $s_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, т.е. имеем расходимость ◀

$b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Ответ:* ряд сходится.

▷ Заметим, что

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

т.е. ряд сходится к сумме

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \qquad ◀$$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Ответ:* ряд сходится.

$\triangleright$ Нетрудно проверить справедливость равенства

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Тогда

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Данный ряд сходится, поскольку существует

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

причем сумма этого ряда $s = \dfrac{1}{4}$ $\blacktriangleleft$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Ответ:* ряд сходится.

$\triangleright$ Используя оценку

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k > 1)\,, \qquad (2)$$

покажем ограниченность сверху последовательности частичных сумм:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \forall n\,.$$

Поскольку $a_n = \dfrac{1}{n^2} > 0$, последовательность $\{s_n\}$ возрастает, значит, она (а вместе с нею и рассматриваемый ряд) сходится ◀

Замечание. Исследование сходимости ряда на основе определения 3 предполагает либо вычисление предела последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ (см. примеры $a) - c)$), либо доказательство его существования на основе теории пределов (пример d)). Заметим, что в первом случае мы находим сумму ряда (тем самым доказав его сходимость).

Однако на практике эти методы применяются редко, так как обычно последовательность $\{s_n\}$ имеет сложный вид. Тогда решить вопрос о сходимости $\{s_n\}$, а тем более вычислить ее предел, не представляется возможным. Поэтому используются другие методы (так называемые *признаки сходимости*), с помощью которых и исследуется сходимость рядов.

2.1.2. Простейшие утверждения о сходимости

Утверждение 1. Из определения 3 следует:

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число s, что

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N = N(\epsilon),\; \forall n > N : \;\; |s - s_n| < \epsilon\,.$$

Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы последовательность остатков ряда была бесконечно малой:
$r_n = o(1)$, $n \to \infty$.

Утверждение 2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд (1) сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{3}$$

$\triangleright$ $a_n = s_n - s_{n-1}$. Так как ряд сходится, существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Замечания. 1) Для решения задач важно очевидное следствие последнего утверждения:

Если не выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

2) Условие (3) не является достаточным.

$\triangleright$ Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено.

В самом деле, рассмотрим оценку частичной суммы:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,.$$

Отсюда следует, что не существует конечного предела последовательности $\{s_n\}$, значит, ряд расходится $\blacktriangleleft$

Примеры.

Доказать расходимость следующих рядов, используя *необходимое условие сходимости:*

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, где $|q| \geq 1$.

$\triangleright$ Этот ряд уже был рассмотрен в примере $a)$ п. 2.1.1. Здесь мы остановимся на доказательстве его расходимости.

Действительно, при $|q| \geq 1$, очевидно, не выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. А именно, для $q > 1$ этот предел равен $+\infty$, для $q = 1$ предел равен 1, а при $q \leq -1$ он не существует $\blacktriangleleft$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{3n^3+1}.$$

$\triangleright$ Ряд расходится, так как для него не выполнено необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{3n^3+1} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n.$$

$\triangleright$ Ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости.

В самом деле, предположим, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. Поскольку

$$\sin(n+1) = \sin n \ \cos 1 + \cos n \ \sin 1,$$

имеем $\quad \cos n \ \sin 1 = \sin(n+1) - \sin n \ \cos 1$.

Из предположения следует, что существует предел при $n \to \infty$ правой части последнего равенства, значит, существует

$$\lim_{n\to\infty} (\cos n \cdot \sin 1) = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) - \cos 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin n = 0.$$

Отсюда с учетом $\sin 1 \neq 0$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$.

С другой стороны, предельный переход в основном тригонометрическом тождестве дает

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 1,$$

что противоречит $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$.

Таким образом, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$ не имеет места ◀

2.1.3. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема. *Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N = N(\epsilon), \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}: \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon\,.$$

▷ По определению сходимость ряда – это сходимость последовательности его частичных сумм $\{s_n\}$. Используя критерий Коши для последовательности, получаем: $\{s_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N = N(\epsilon), \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}: \ |s_{n+p} - s_n| < \epsilon\,.$$

Но

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \quad ◀$$

Примеры.

Исследовать сходимость рядов с помощью *критерия Коши.*

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

▷ Используя очевидное неравенство $\dfrac{1}{k^3} < \dfrac{1}{k^2}$, $\quad k > 1$, и оценку (2), рассмотрим

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^3} < \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\,.$$

Итак,

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}\,,$$

если $n > N$, где $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$. Ряд сходится согласно критерию Коши ◀

$b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *(гармонический ряд).*

▷ Рассмотрим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\,,$$

если $p = n$. Таким образом,

$$\exists \epsilon = \frac{1}{2} > 0,\ \ \forall N,\ \forall n > N,\ \exists p = n: \quad |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| > \epsilon\,,$$

т.е. по критерию Коши ряд расходится ◀

$c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^3}$.

▷ Рассмотрим

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)^3}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)^3}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)^3}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^3}\,.$$

Далее можно полностью повторить оценки примера a). Поэтому получаем

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall n > N\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,,$$

так что ряд сходится ◀

$d)\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}\,.$

▷ Рассмотрим $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| =$

$$= \left|\frac{2+\sin(n+1)}{\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}} + \cdots + \frac{2+\sin(n+p)}{\sqrt{(n+p)\cdot(n+p+1)}}\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+p)\cdot(n+p+1)}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{(n+2)\cdot(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+p+1)\cdot(n+p+1)}} =$$

$$= \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p+1} > \frac{p}{n+p+1} = \frac{n}{2n+1} > \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}\,,$$

если $p = n > 1$. (Мы использовали очевидные соотношения

$$|2 + \sin k| = 2 + \sin k \geq 1$$

и идею решения задачи b)).

Таким образом,

$$\exists \epsilon = \frac{1}{3} > 0, \quad \forall N, \ \forall n > N, \ \exists p = n: \quad |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| > \epsilon\,,$$

и по критерию Коши ряд расходится ◀

$e)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\{\ln n\}}{3^n}\,.$

$\triangleright$ Здесь запись $\{\ln n\}$ обозначает дробную часть числа $\ln n$. Известно, что $0 \le \{\ln n\} < 1$.

Оценим сумму

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = \left| \frac{\{\ln(n+1)\}}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{\{\ln(n+p)\}}{3^{n+p}} \right| <$$

$$< \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} < \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} + \frac{1}{3^{n+p+1}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots \right) = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Поэтому, очевидно, $\forall \epsilon > 0$ найдется такой номер N, что

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n > N\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,,$$

так что ряд сходится $\blacktriangleleft$

$f)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5/2}}\,.$

$\triangleright$ Поскольку $\ln n = o\left(n^{1/2}\right)$ при $n \to \infty$, то найдется такой номер N, что для $n > N$ имеем $\dfrac{\ln n}{n^{1/2}} < 1$ (см. п. 1.3.5). Тогда

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = \left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{5/2}} + \cdots + \frac{\ln(n+p)}{(n+p)^{5/2}} \right| =$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\ln(n+p)}{(n+p)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\,.$$

Далее, используя оценку (2) и повторяя рассуждения, приведенные в примере a), получаем сходимость данного ряда ◀

2.1.4. Некоторые свойства числовых рядов

a) *Ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$, *где* $m > 1$, *сходятся и расходятся одновременно.*

▷ Доказательство следует из того, что критерий Коши сходимости одного из этих рядов является одновременно критерием Коши сходимости и второго ряда ◀

Замечание. Утверждение a) означает, что отбрасывание, добавление или изменение любого конечного числа членов данного ряда не влияет на его сходимость (но может повлиять на сумму).

b) *Пусть* $c \neq 0$ *– фиксированное число. Тогда сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *эквивалентна сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$. *При этом если* s *– сумма ряда (1), то второй ряд имеет сумму* $c \cdot s$.

▷ Перейдем к рассмотрению частичных сумм этих рядов, которые равны соответственно s_n и $c \cdot s_n$. Утверждение следует из того, что последовательности $\{s_n\}$ и $\{c \cdot s_n\}$ при $c \neq 0$ сходятся и расходятся одновременно ◀

Замечание. Если $c = 0$, то второй ряд сходится всегда.

c) *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и имеют суммы* A *и* B *соответственно. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

сходится и имеет сумму $A + B$.

$\triangleright$ Обозначим частичные суммы данных рядов

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n\,, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n\,.$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A\,, \quad \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B\,.$

Тогда частичные суммы третьего ряда имеют вид

$$C_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n\,.$$

По теореме о сумме сходящихся последовательностей существует

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B \quad \blacktriangleleft$$

2.1.5. Вопросы и задачи

1. Исходя из определения, докажите сходимость следующих рядов и найдите их суммы:

a) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots\,;$

b) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots\,;$

c) $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots\,;$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right);$

$e)\quad q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \qquad (|q|<1)\,;$

$f)\quad q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \qquad (|q|<1)\,.$

2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обязан ли сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,?$

3. Докажите расходимость рядов, используя необходимое условие сходимости:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+2}\,; \qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}; \qquad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}\,;$

$d)\quad 0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \cdots + \sqrt[n]{0,001} + \cdots\,;$

$e)\quad \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha + \cdots\,;$

$f)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n}\,.$

4. Исследуйте сходимость рядов, используя критерий Коши:

$a)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^5)}{2^n}\,; \qquad b)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+5)}{n^2}\,;$

$c)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\cos^2 n}{\sqrt{n}}\,; \qquad d)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}\,;$

$e)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}\,; \qquad f)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx\cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{n}+3)}{n^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\,.$

5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите, что полученный из него в результате группировки членов (без перестановок) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также сходится и имеет ту же сумму. Докажите, что обратное неверно.

2.2. Знакопостоянные ряды. Сходимость рядов с неотрицательными членами

2.2.1. Знакопостоянные ряды

Определение. Ряд называется *знакопостоянным*, если его члены a_n не меняют знака $\forall n \geq n_0$.

Заметим, что в соответствии со свойством a) п. 2.1.4 отбрасывание или изменение любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, поэтому можно считать, что a_n сохраняют знаки $\forall n \geq 1$.

В дальнейшем будем для определенности рассматривать числовой ряд с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n\,, \text{ где } p_n \geq 0 \tag{1}$$

(подчеркивая неотрицательность членов, для них используют обозначение p_n вместо a_n).

Все утверждения этого параграфа о сходимости остаются справедливыми для знакопостоянных рядов (если $a_n \leq 0$, то нужно произвести умножение на -1; сходимость при этом сохраняется, см. 2.1.4 b)).

Теорема 1 (критерий сходимости рядов с неотрицательными членами).

Ряд (1) с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его последовательность частичных сумм *ограничена сверху, т.е. существует такое число* C, *что* $s_n \le C \quad \forall n$.

$\triangleright$ Необходимость. Пусть ряд (1) сходится. Это значит, что сходится последовательность $\{s_n\}$, поэтому она ограничена.

Достаточность. Из условия $p_n \ge 0$ вытекает, что последовательность $\{s_n\}$ монотонно не убывает. Так как по условию теоремы она ограничена сверху, $\{s_n\}$ сходится $\blacktriangleleft$

2.2.2. Признаки сравнения

Теорема 2 (первый признак сравнения).
Рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \qquad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p'_n \, . \qquad (2)$$

Если $\forall n \;\; 0 \le p_n \le p'_n$, *то*
1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
2) из расходимости ряда (1) следует расходимость (2).

$\triangleright$ Обозначим последовательности частичных сумм рядов (1) и (2) соответственно $\{s_n\}$ и $\{s'_n\}$. Из условия $p_n \le p'_n$ имеем $s_n \le s'_n$.

1) Пусть ряд (2) сходится. По теореме 1 существует такое число C, что $s'_n \le C \;\; \forall n$. Но тогда и $s_n \le C$, следовательно, сходится ряд (1).

2) Пусть ряд (1) расходится. Из теоремы 1 следует, что последовательность $\{s_n\}$ не ограничена сверху. Следовательно, не ограничена также и $\{s'_n\}$, поэтому ряд (2) расходится $\blacktriangleleft$

Замечание. Как уже отмечалось, изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, поэтому в условиях этой и нижеследующих теорем достаточно требовать выполнения неравенств вида $p_n \ge 0$ или $p_n \le p'_n$ и т.п. не для всех n, а $\forall n \ge n_0$, n_0 – фиксированное число.

Следствие. *Пусть* $p_n \geq 0$, $p'_n \geq 0$ *и* $p_n = o(p'_n)$, $n \to \infty$. *Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

$\triangleright$ Если $p_n = o(p'_n)$, $n \to \infty$, то имеет место неравенство $0 \leq p_n \leq p'_n \quad \forall n \geq n_0$, откуда в силу теоремы 2 следует утверждение $\blacktriangleleft$

Теорема 3 (второй признак сравнения).
Пусть $p_n \geq 0$, $p'_n \geq 0$ *и* $p_n = \mathcal{O}^*(p'_n)$, $n \to \infty$ *(т.е.* $p_n \asymp p'_n$, $n \to \infty$*). Тогда оба ряда (1),(2) сходятся или расходятся одновременно.*

$\triangleright$ Из условия $p_n = \mathcal{O}^*(p'_n)$, $n \to \infty$, следует, что найдутся такой номер n_0 и такие постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$,
что $|p_n| \leq M_1\, |p'_n|$ и одновременно $|p'_n| \leq M_2\, |p_n| \;\; \forall n > n_0$.

С учетом неотрицательности p_n, p'_n имеем

$$0 \leq p_n \leq M_1 \cdot p'_n\,, \tag{3}$$

$$0 \leq p'_n \leq M_2 \cdot p_n\,. \tag{4}$$

Остается применить теорему 2. Действительно, пусть сходится ряд (2). Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_1 \cdot p'_n$ и из неравенств (3) следует сходимость ряда (1).

Аналогично, имея сходимость (1), с помощью неравенств (4) по теореме 2 получаем сходимость ряда (2) $\blacktriangleleft$

Следствия теоремы 3.

Утверждение 1 (признак сравнения в предельной форме).

Пусть $p_n > 0$, $p'_n > 0$ *и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p'_n} = L \qquad (L \neq 0\,, L \neq \infty)\,.$$

Тогда оба ряда (1),(2) сходятся или расходятся одновременно.

$\triangleright$ В предположении существования конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{p'_n} = L$, где $L \neq 0$, из этого условия следует $p_n \asymp p'_n$, $n \to \infty$ $\blacktriangleleft$

Важным частным случаем (при $L = 1$) утверждения 1 является

Утверждение 2.
Пусть $p_n \sim p'_n$, $n \to \infty$. *Тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание. Обратите внимание на то, что все признаки сравнения сформулированы для рядов с неотрицательными членами. Ниже приведен пример (см. 2.4.4 h)), показывающий, что *для знакопеременного ряда утверждение 2 неприменимо.*

Примеры использования *признаков сравнения.*

Применение теорем 2, 3, а также их следствий к исследованию сходимости сводится к сравнению членов данного ряда с членами уже известных рядов. Этими рядами чаще всего являются сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$, и обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (ряд Дирихле).

1. Исследуем сходимость *обобщенного гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{5}$$

для $a)$ $p > 2$; $b)$ $p < 1$.

(Сходимость ряда (5) для $1 < p < 2$ будет показана ниже, см. 2.3.1, пример a)).

$\triangleright$ Очевидно, $\dfrac{1}{n^p} \le \dfrac{1}{n^2}$ при $p \ge 2$; $\dfrac{1}{n^p} \ge \dfrac{1}{n}$ при $p \le 1$.

Выше было доказано, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (2.1.1, пример d)), а ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (2.1.3, пример b)). Поэтому согласно первому признаку сравнения ряд (5) при $p > 2$ сходится, а при $p < 1$ расходится $\blacktriangleleft$

2. Исследовать сходимость следующих рядов:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{1}{3^n}$;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$.

$\triangleright$ $a)$ Поскольку $0 < \ln n < n$, $n \ge 2$, то $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по первому признаку сравнения расходится и данный ряд $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ $b)$ Отметим, что $\sin\dfrac{1}{3^n} > 0$ $\forall n \ge 1$.

В силу известного неравенства $0 \le \sin\alpha \le \alpha$ $(\alpha \ge 0)$ имеем

$$2^n \sin\frac{1}{3^n} \le 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ сходится, наш ряд также является сходящимся ◄

▷ c) При $n \geq 1$ $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 0$. Имеем

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\,, \quad n \to \infty\,.$$

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, данный ряд также расходится в силу утверждения 2 ◄

▷ d) Очевидно, члены этого ряда положительны. При $n \to \infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}\,; \qquad \frac{n}{n^2+1}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^2}\,.$$

Исходный ряд сходится в силу признака сравнения, потому что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ◄

2.2.3. Признаки Даламбера и Коши

Теорема 4 (признак Даламбера).

1) Пусть члены ряда (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, *где* $p_n > 0$, *удовлетворяют неравенству*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q < 1 \quad \forall n \geq n_0 \geq 1\,. \tag{6}$$

Тогда ряд (1) сходится.

2) Если $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1\,, \forall n \geq n_0 \geq 1\,,$ *то ряд (1) расходится.*

$\triangleright$ 1) Заметим, что, не уменьшая общности, можно считать $n_0 = 1$. Тогда из неравенства (6) следует

$$p_{n+1} \leq q \cdot p_n \leq q^2 \cdot p_{n-1} \leq \cdots \leq q^n \cdot p_1 .$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_1 \cdot q^n$, следовательно, сходится (1) в силу теоремы 2.

2) Если $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1$, т.е. $p_{n+1} \geq p_n > 0 \ \forall n$, то не выполнено необходимое условие сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, поэтому ряд (1) расходится $\blacktriangleleft$

Для практических целей более удобна

Теорема 5 (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть для членов ряда (1) существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = L$. *Тогда*

1) при $L < 1$ ряд сходится;

2) при $L > 1$ ряд расходится.

$\triangleright$ Если $L < 1$, то найдется такое число $\epsilon > 0$, что $L = 1 - 2\epsilon$, т.е. $L + \epsilon = 1 - \epsilon$.

По определению предела для этого ϵ существует такой номер N, что $\forall n > N$

$$L - \epsilon < \frac{p_{n+1}}{p_n} < L + \epsilon = 1 - \epsilon . \qquad (7)$$

Число $1 - \epsilon$ играет роль $q < 1$ из неравенства (6). В силу теоремы 4 ряд сходится.

Если $L > 1$, то существует такое число $\epsilon > 0$, что $L = 1 + \epsilon$, т.е. $L - \epsilon = 1$. Тогда на основании левого неравенства из (7) имеем:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} > L - \epsilon = 1 \quad \forall n > N\,,$$

откуда по теореме 4 получаем расходимость ряда (1) $\blacktriangleleft$

Замечания. 1) В теореме 4 условие $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \le q < 1$ нельзя заменить на $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1$.

$\triangleright$ В самом деле, для гармонического ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, имеем

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n}{n+1} < 1\,,$$

однако этот ряд расходится $\blacktriangleleft$

2) В теореме 5 при $L = 1$ о сходимости ряда (1) ничего нельзя сказать.

$\triangleright$ Действительно, легко проверить, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$ для рядов $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, первый из которых сходится, а второй расходится $\blacktriangleleft$

Теорема 6 (признак Коши).

Рассмотрим ряд с неотрицательными членами (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n\,, \qquad p_n \ge 0\,.$$

1) Если $\sqrt[n]{p_n} \le q < 1 \quad \forall n\,,$ (8)

то ряд сходится.

2) Если $\sqrt[n]{p_n} \ge 1 \quad \forall n\,,$ (9)

то ряд расходится.

$\triangleright$ 1) Из неравенства (8) следует, что $p_n \le q^n$. По признаку сравнения получаем сходимость ряда (1), так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $0 \le q < 1$, сходится.

2) Из неравенства (9) вытекает $p_n \ge 1 \ \forall n$, т.е. для ряда (1) не выполнено необходимое условие сходимости $\blacktriangleleft$

Теорема 7 (признак Коши в предельной форме).
Если для членов ряда (1) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = L$,
то 1) при $L < 1$ *ряд сходится;*
2) при $L > 1$ *ряд расходится.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Замечания. 1) Как и в случае признака Даламбера, условие (8) теоремы 6 нельзя заменить на $\sqrt[n]{p_n} < 1$.

2) В случае $L = 1$ признак Коши в предельной форме не решает вопроса о сходимости ряда.

Теорема 8 (усиленный признак Коши).
Пусть верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_n} = L$,
тогда 1) при $L < 1$ *ряд (1) сходится;*
2) при $L > 1$ *ряд расходится.*

$\triangleright$ Заметим, что верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_n}$, возможно бесконечный, существует всегда.

1) Пусть $L < 1$. Поскольку верхний предел – наибольшая из предельных точек последовательности, то $\forall \epsilon > 0$ найдется такое число N, что $\forall n > N$ выполнено неравенство
$\sqrt[n]{p_n} < L + \epsilon$.

Выбирая $\epsilon = \dfrac{1-L}{2}$, имеем $q = L + \epsilon = \dfrac{1+L}{2} < 1$. Поэтому утверждение следует из п. 1) теоремы 6.

2) Пусть $L > 1$. Рассмотрим монотонно сходящуюся к нулю последовательность чисел $\epsilon_n = \dfrac{L-1}{n}$. Из определения верхнего предела следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ существует такой член рассматриваемой последовательности $\{\sqrt[k]{p_k}\}$ с номером k_n, что $\sqrt[k_n]{p_{k_n}} > L - \epsilon_n$.

Так как при $n > 1$ справедливо неравенство $L - \epsilon_n > L - \epsilon_1 = 1$, то $p_{k_n} > 1$. Поэтому для последовательности членов ряда не выполнено необходимое условие сходимости $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 0$, значит, ряд (1) расходится ◀

Примеры применения *признаков Даламбера и Коши.*

Исследовать следующие ряды на сходимость:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x > 0; \qquad b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log_2 n)^n};$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}; \qquad d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \cdot \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

$$e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}; \qquad f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}\,\left(\sqrt{3} + (-1)^n\right)^n}{2^n + 3^n}.$$

▷ $a)$ Находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера ◀

▷ $b)$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\log_2 n} = 0 < 1,$$

поэтому ряд сходится в силу признака Коши ◀

$\triangleright$ *c*) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\;n^n}{(n+1)^{n+1}\;3^n\;n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1\,,$$

следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ *d*) Вычисляем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^7}\cdot\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} > 1\,.$$

Итак, ряд расходится по признаку Коши $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ *e*) Рассмотрим $\quad \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{\left[(-1)^{n+1}+3\right]\cdot 2^{n+1}}{2^{n+2}\cdot\left[(-1)^n+3\right]} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}+3}{(-1)^n+3} = \begin{cases} 1\,, & n=2k+1,\\ \dfrac{1}{4}\,, & n=2k.\end{cases}$$

Последовательность $\left\{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right\}$ имеет две предельные точки, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ не существует и признак Даламбера в предельной форме не применим. Условия теоремы 4 также не выполнены, поэтому признак Даламбера не дает результата.

В то же время существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2}} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Итак, по признаку Коши ряд сходится $\blacktriangleleft$

$\triangleright$ $f)$ Заметив, что $p_n > 0$, найдем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}\,\left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}\,\left(\sqrt{3}+1\right)}{3\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3} < 1\,.$$

Следовательно, по усиленному признаку Коши ряд сходится ◀

Замечание. Из доказательства теорем 4, 6 видно, что признаки Даламбера и Коши как средство исследования сходимости рядов примерно одинаковы по точности (сходимость в обоих случаях получается из сравнения с членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а расходимость – по причине невыполнения необходимого условия). Однако признак Коши является несколько более сильным, чем признак Даламбера, в следующем смысле: когда признак Даламбера дает результат, тот же результат дает и признак Коши. Если же признак Даламбера не дает ответа о сходимости (или расходимости) ряда, признак Коши такой ответ может дать (см. пример $e)$).

2.2.6. Вопросы и задачи

1. Пусть $a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обязан ли сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

2. Приведите примеры, доказывающие утверждения замечаний 1), 2) к теоремам 6 и 7.

3. Докажите *усиленный признак Даламбера*:

Если для членов ряда (1), где $p_n > 0$, выполнено неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1$, то ряд (1) сходится.

4. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда сходится полученный из него в результате произвольной группировки членов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(Сравните с утверждением задачи 5 п. 2.1.5).

5. Докажите, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $\quad p_n > 0$, следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}}$.

6. Следует ли из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}}$, $\quad p_n > 0$, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$?

7. Исследуйте сходимость следующих рядов, используя различные признаки:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[5]{\frac{n}{n+1}}\right); \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin^n x, \quad |x| \leq 1;$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2+3}; \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n + 4^n}; \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^8(2n-3)}{n(3n+1)};$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}\,; \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 2\cos(n!)}{n^3+\ln^3 n}\,;$$

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,; \qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^4)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n-1}}\,;$$

$$k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{(n!)\,(4n)!}\,; \qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n}}\,.$$

2.3. Знакопостоянные ряды. (Продолжение)

2.3.1. Интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \ge 0$ и не возрастает при $x > m$, где m – некоторое натуральное число. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots \tag{1}$$

сходится в том и только том случае, когда сходится последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \displaystyle\int_m^n f(x)dx$, т.е. существует конечный предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_m^n f(x)dx = \int_m^{+\infty} f(x)dx$ (другими словами: сходится несобственный интеграл первого рода $\displaystyle\int_m^{+\infty} f(x)dx$).

$\triangleright$ Пусть $k-$ любой номер, $k \ge m+1$; $x \in [k-1,\ k]$; по условию теоремы

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1)\,.$$

Поскольку функция $f(x)$ ограничена и монотонна, она интегрируема на сегменте $[k-1\,;\,k]$ и

$$\int_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx\,,$$

или

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k-1)\,.$$

Выпишем последнее неравенство для всех значений k от $m+1$ до n :

$$f(m+1) \le \int_{m}^{m+1} f(x)dx \le f(m)\,,$$

$$f(m+2) \le \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx \le f(m+1)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1)\,.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k)\,.$$

Обозначив частичную сумму ряда (1)

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} f(k)\,, \qquad f(k) \ge 0\,,$$

имеем

$$s_n - f(m) \le a_n \le s_{n-1}\,. \tag{2}$$

Из определения a_n и условия $f(x) \ge 0$ следует, что последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Поэтому для ее сходимости необходима и достаточна ее ограниченность.

Пусть ряд (1) сходится. Тогда $\{s_n\}$ ограничена, следовательно, из (2) получаем ограниченность, а значит и сходимость $\{a_n\}$.

С другой стороны, из (2) имеем $s_n \le a_n + f(m)$. Если сходится $\{a_n\}$, то эта последовательность ограничена. В силу последнего неравенства ограниченной является и $\{s_n\}$, следовательно, по теореме 1 п. 2.2.1 ряд (1) сходится ◀

Примеры применения *интегрального признака.*

Исследовать следующие ряды на сходимость:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,; \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n}\,.$$

▷ $a)$ Если $p \le 0$, ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ при $x \ge 1$. Очевидно, $f(x) > 0$ и убывает.

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Итак, с помощью интегрального признака получен окончательный результат:

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$, *расходится при* $p \le 1$

◀

▷ $b)$ Рассмотрим $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot\ln x}$ при $x \ge 2$. Функция $f(x) > 0$, убывает.

Интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

расходится, следовательно, данный ряд также расходится ◀

2.3.2. Признак Гаусса.

Существуют признаки сходимости рядов с положительными членами более сильные, чем признаки Даламбера и Коши. Таковы, например, *признаки Гаусса, Раабе*. Приведем один из них – признак Гаусса. Его доказательству предшествует

Лемма. *Пусть для последовательности с членами* $p_n > 0$ *имеет место асимптотическое равенство при* $n \to \infty$

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3}$$

Тогда найдется такое число $C \neq 0$, *что* $p_n \sim \dfrac{C}{n^{\mu}}$, $n \to \infty$.

▷ Возьмем последовательность положительных чисел $a_n = \dfrac{p_n}{1/n^{\mu}} = n^{\mu} \cdot p_n$. Используя (3) и биномиальное разложение (см. п. 1.4), получаем при $n \to \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mu} \cdot \frac{p_{n+1}}{p_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\mu} \cdot \left(1 + \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим для достаточно больших номеров m и $n > m$ отношение

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Тогда

$$\ln \frac{a_n}{a_m} = \sum_{k=m}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \sum_{k=m}^{n-1} \ln \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{4}$$

Отсюда

$$\ln a_n = \ln a_m + s_n\,,$$

где $s_n = \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Ряд в правой части (4) сходится, так как

$$\left|\ln \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \to \infty\,.$$

Пусть его сумма равна s. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a_m + s\,,$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n} = e^{\ln a_m + s} = a_m \cdot e^s = C > 0\,.$$

Это и означает, что $p_n \sim \dfrac{C}{n^{\mu}}\,, \quad n \to \infty$ ◀

Теорема 2 (признак Гаусса).

Если для членов ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n\,, \quad p_n > 0\,,$ (5)

справедливо представление

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty\,,$$

то 1) при $\lambda > 1$ *ряд (5) сходится, при* $\lambda < 1$ *– расходится;*

2) при $\lambda = 1$ ряд (5) сходится, если $\mu > 1$ и расходится, если $\mu \le 1$.

$\triangleright$ Заметим сначала, что при $\lambda \ne 1$ признак Гаусса превращается в признак Даламбера. В самом деле, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\lambda},$$

то в силу теоремы 5 п. 2.2.3 при $\lambda > 1$ ряд (5) сходится, при $\lambda < 1$ – расходится.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда утверждение теоремы следует из леммы. Для этого достаточно применить второй признак сравнения (теорема 3 п. 2.2.2) и использовать результат о сходимости обобщенного гармонического ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\mu}$ $\blacktriangleleft$

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если условие асимптотики для членов ряда (5) имеет вид при $n \to \infty$

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right), \quad \epsilon > 0.$$

Примеры применения *признака Гаусса.*

1. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$.

$\triangleright$ Рассмотрим при $n \to \infty$:

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{(2n-1)!! \cdot (2n+2)!! \cdot (2n+3)}{(2n)!! \cdot (2n+1) \cdot (2n+1)!!} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{2}{2n+1}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

значит, ряд сходится по признаку Гаусса, поскольку $\lambda = 1$, $\mu = 3/2$.

Мы воспользовались преобразованием

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1} = \frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n\to\infty \quad ◀$$

2. Найти все значения параметра p, при которых сходится следующий ряд: $a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$; $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

$\triangleright$ $a)$ Вычисляем при $n\to\infty$: $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} =$

$$= \left(\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+2)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)!!}\right)^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p =$$

$$= 1+\frac{p}{2n+1}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 1+\frac{p}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В терминах теоремы 2 имеем $\lambda = 1$, $\mu = p/2$, откуда следует ответ: ряд сходится тогда и только тогда, когда $p > 2$.

При проведении выкладок были использованы асимптотические формулы

$$(1+x)^p = 1+px+\mathcal{O}(x^2), \quad x\to 0,$$

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n\to\infty \quad ◀$$

$\triangleright$ $b)$ Найдем асимптотику отношения

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{e^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1+p}}{n^{n+p} \cdot e^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} \cdot e^{(n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{p}{n} - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{p - \frac{1}{2}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty .$$

Мы воспользовались основным логарифмическим тождеством и асимптотическими равенствами (при $x \to 0$) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \qquad \text{для} \quad x = \frac{1}{n};$$

$$e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \quad \text{для} \quad x = \frac{p - \frac{1}{2}}{n} \quad (n \to \infty) .$$

Итак, $\lambda = 1$, $\mu = p - 1/2$, поэтому ряд сходится тогда и только тогда, когда $p > 3/2$ ◀

2.3.3. Формула Стирлинга.

Эта формула дает асимптотическое поведение последовательности $\{n!\}$.

Теорема 3.

$$n! \sim A\sqrt{n} \cdot n^n \cdot e^{-n}, \quad n \to \infty \tag{6}$$

(здесь $A > 0$ – некоторое число).

$\triangleright$ Рассмотрим последовательность с членами $p_n = \dfrac{n!}{n^n\, e^{-n}}$ и вычислим

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)^{n+1}\, e^n}{(n+1)!\, n^n\, e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= e^{-1 + n\,\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = e^{-1 + n\cdot\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty\,.$$

Применив теперь лемму п. 2.3.2 (при $\mu = -1/2$), получаем

$$p_n = \frac{n!}{n^n\,e^{-n}} \sim \frac{A}{n^{-1/2}} = A\,\sqrt{n}\,, \quad n \to \infty\,,$$

где $A > 0$ – некоторое число. Отсюда

$$n! \sim A\,\sqrt{n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\,, \quad n \to \infty \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание. Можно показать, используя *формулу Валлиса* (см. **Добавление** в конце книги), что константа в формуле Стирлинга $A = \sqrt{2\pi}$.

Примеры использования *формулы Стирлинга.*

Исследовать сходимость следующих рядов:

$$a)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}\,; \qquad\qquad b)\ \ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}\,.$$

$\triangleright$ *a*) Заметим, что члены ряда положительны. Для общего члена ряда в силу формулы (6) имеем при $n \to \infty$

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} \sim \frac{A\,\sqrt{n}\cdot n^n\cdot e^{-n}}{n^{\sqrt{n}}} = A\,\frac{\sqrt{n}\cdot n^{n-\sqrt{n}}}{e^n} = p_n\,.$$

Очевидно, найдется такое число n_0, что при $n > n_0$ справедливо неравенство $n-\sqrt{n} > \dfrac{n}{2}$. Тогда, считая, что $n_0 > e^2$, имеем

$$p_n > A\,\frac{\sqrt{n}\cdot n^{n/2}}{e^n} > A\,\frac{\sqrt{n}\cdot e^n}{e^n} = A\cdot\sqrt{n} \quad \forall n > n_0\,.$$

Таким образом, не выполнено необходимое условие сходимости, поэтому ряд расходится ◀

▷ b) Преобразуем общий член ряда, заметив, что $p_n > 0$:

$$p_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} \sim \frac{\ln\left(A\sqrt{n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\right)}{n^2} =$$

$$= \frac{\ln A + \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot \ln n - n}{n^2} \sim \frac{n\cdot \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}\,, \quad n\to\infty\,.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ расходится, так как $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$ для $n \geq 3$; значит, в силу признака сравнения данный ряд также расходится ◀

2.3.4. Разные задачи.

1. Используя асимптотические равенства и признаки сравнения, исследовать, при каких значениях параметра p сходятся следующие ряды:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^p+2}\cdot\sin\frac{1}{k}\,; \qquad b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^p\cdot\ln\frac{k-1}{k+1}\,;$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\log_{p^k}\left(1+\frac{\sqrt[k]{2}}{k}\right); \qquad d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+e^{-k}}{2k+3}\cdot\mathrm{arctg}\,(k^p)\,.$$

▷ a) Заметим сначала, что члены ряда положительны, так как $\sin\dfrac{1}{k} > 0$, $k \geq 1$.

Рассмотрим $p \leq 0$. Тогда при $k\to\infty$

$$\frac{\sqrt{k}}{k^p+2} = \mathcal{O}^*(k^{1/2})\,,$$

так как

$$\lim_{k\to\infty}(k^p+2) = \begin{cases} 2\,, & p<0\,,\\ 3\,, & p=0\,.\end{cases}$$

Проводя сравнение с членами обобщенного гармонического ряда, получаем в данном случае расходимость.

Пусть $p > 0$. Тогда при $k \to \infty$

$$\frac{\sqrt{k}}{k^p + 2} \sim \frac{1}{k^{p-\frac{1}{2}}},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{k}}{k^p + 2} \cdot \sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k^{p-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^{p+\frac{1}{2}}}, \quad k \to \infty.$$

Поэтому по признаку сравнения ряд сходится тогда и только тогда, когда $p + \dfrac{1}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad p > \dfrac{1}{2}$.

Ответ: Ряд сходится, если $p > \dfrac{1}{2}$, расходится, если $p \le \dfrac{1}{2}$ ◀

▷ $b)$ Отметим сначала, что

$$a_k = \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^p \cdot \ln\frac{k-1}{k+1} < 0.$$

Так как при $k \to \infty$

$$\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^p = \frac{1}{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)^p} \sim \frac{1}{2^p\ k^{p/2}},$$

$$\ln\frac{k-1}{k+1} = \ln\left(1 - \frac{2}{k+1}\right) \sim -\frac{2}{k+1} \sim -\frac{2}{k},$$

то

$$a_k \sim -\frac{1}{2^{p-1}\ k^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Поскольку ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-a_k)$ сходится тогда и только тогда, когда $1+\dfrac{p}{2}>1 \quad \Leftrightarrow \quad p>0$, исходный ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ сходится при тех же значениях p.

Ответ: Ряд сходится, если $p>0$, расходится, если $p \le 0$ ◀

▷ c) Отметим условие существования логарифма: $p>0$, $p \ne 1$. Преобразуем

$$a_k = \log_{p^k}\left(1+\frac{\sqrt[k]{2}}{k}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[k]{2}}{k}\right)}{\ln(p^k)} = \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[k]{2}}{k}\right)}{k\ \ln p},$$

откуда видно, что a_k сохраняют знак (он совпадает со знаком $\ln p$). При $k \to \infty$

$$a_k \sim \frac{\sqrt[k]{2}}{k}\cdot\frac{1}{k\ \ln p} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

следовательно, по признаку сравнения ряд сходится при любых значениях $p>0$, $p \ne 1$ ◀

▷ d) Заметим для начала, что

$$a_k > 0, \quad \frac{k^2+e^{-k}}{2k+3} \sim \frac{k}{2}, \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Для $p \ge 0$ имеем $\operatorname{arctg}(k^p) = \mathcal{O}^*(1)$. Поэтому $a_k = \mathcal{O}^*(k)$, $k \to \infty$, следовательно, ряд расходится, так как для него не выполнено необходимое условие сходимости.

При $p<0$ имеем $\operatorname{arctg}(k^p) \sim \dfrac{1}{k^{-p}}$. Тогда

$$a_k \sim \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{k^{-p}} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{k^{-(p+1)}}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

поэтому ряд сходится тогда и только тогда, когда
$-1-p>1 \quad \Leftrightarrow \quad p<-2 \quad \blacktriangleleft$

2. Используя асимптотические неравенства и признаки сравнения, исследовать сходимость следующих рядов:

$a)\ \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\ln^p\ k}{k\sqrt{k}}\,;$ $\qquad b)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln\ k}{k^p}\,;$

$c)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \cdot e^{-\sqrt{k}}\,;$ $\qquad d)\ \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln\ k)^{\ln\ln k}}\,.$

(Асимптотические неравенства, которые используются при решении примеров этого задания, получаются либо на основе шкалы роста (см. п. 1.3.5), либо непосредственными вычислениями.)

$\triangleright$ $a)$ Зафиксируем произвольно взятое число p. Известно (см. 1.3.2), что

$$\ln^p\ k = o(\sqrt[4]{k}) \quad \text{при} \quad k\to\infty\,.$$

Поэтому найдется такое число $k_0 = k_0(p)$, что $\ln^p\ k < \sqrt[4]{k}$ $\forall k > k_0$, тогда

$$0 < \frac{\ln^p\ k}{k\sqrt{k}} < \frac{\sqrt[4]{k}}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}} \quad \forall k > k_0\,.$$

Так как сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\frac{5}{4}}}$, исходный ряд также сходится по первому признаку сравнения при любом $p \quad \blacktriangleleft$

$\triangleright$ $b)$ Для $p\le 1$ справедливы неравенства

$$\frac{\ln\ k}{k^p} > \frac{1}{k^p} \ge \frac{1}{k}\,, \quad k>2\,,$$

поэтому данный ряд расходится в силу признака сравнения.

Пусть $p > 1$. Тогда найдется такое число $\epsilon > 0$, что $p - \epsilon > 1$. Так как

$$\ln\ k = o(k^{\epsilon}) \quad \text{при} \quad k \to \infty\,,$$

имеем

$$\frac{\ln\ k}{k^p} = \frac{1}{k^p} \cdot o(k^{\epsilon}) = o\left(\frac{1}{k^{p-\epsilon}}\right)\,.$$

Поскольку сходится ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p-\epsilon}}$, где $p-\epsilon > 1$, исходный ряд при $p > 1$ также сходится ◀

▷ c) Покажем, что для достаточно больших значений k верно неравенство

$$k^p \cdot e^{-\sqrt{k}} < \frac{1}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad k^{p+2} < e^{\sqrt{k}}\,. \tag{7}$$

Действительно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{p+2}}{e^{\sqrt{k}}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{k} \\ k = x^2 \end{array} \right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2(p+2)}}{e^x} = 0 \quad \forall p\,,$$

как следует из шкалы роста (см. п. 1.3.2). Поэтому найдется такое число $k_0 = k_0(p)$, что $\dfrac{k^{p+2}}{e^{\sqrt{k}}} < 1 \quad \forall k > k_0$, откуда и следует (7). Из сравнения со сходящимся рядом $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ следует сходимость данного ряда ◀

▷ d) Преобразуем выражение a_k^{-1}, используя основное логарифмическое тождество:

$$a_k^{-1} = \ln k^{\ln\ln k} = e^{\ln\ln k \cdot \ln\ln k} = e^{(\ln\ln k)^2}\,.$$

Заметим, что при достаточно больших значениях k справедливо неравенство
$$(\ln\ln k)^2 < \ln k\,.$$
В самом деле, это следует из того, что $(\ln\ln k)^2 = o(\ln k)\,,$ $k\to\infty\,,$ так как
$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln\ln k)^2}{\ln k} = \{\ x=\ln k\ \} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = 0\,.$$
Поэтому
$$a_k = \frac{1}{\ln k^{\ln\ln k}} = e^{-(\ln\ln k)^2} > e^{-\ln k} = \frac{1}{k}\quad \forall k>k_0\,,$$
откуда согласно первому признаку сравнения следует расходимость данного ряда ◀

2.3.5. Вопросы и задачи.

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x\ge 1\,,$ $f(x)\ge 0\,,$ несобственный интеграл $\displaystyle\int_m^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Обязан ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходиться?

Указание. Рассмотрите функцию, определенную следующим образом:
$f(x) = 1-n^2\cdot|x-n|\,,$ если $x\in\left[n-\dfrac{1}{n^2}\,;\,n+\dfrac{1}{n^2}\right]\,,$ $n\ge 2\,;$
$f(x)=0$ в остальных точках $x\ge 1\,.$

2. Дан числовой ряд с неотрицательными членами $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$

а) Следует ли из условия $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\quad n \to \infty$, сходимость этого ряда ?

б) Следует ли из условия $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\quad n \to \infty$, расходимость ряда ?

в) Следует ли из условия $a_n = O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\quad n \to \infty$, расходимость ряда ?

3. Для ряда $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a^n}{n^b \cdot (\ln n)^c}$, $\quad a > 0$,
выясните, при каких значениях параметров a, b, c этот ряд $a)$ сходится; $\quad b)$ расходится.

4. Исследуйте сходимость следующих рядов, используя различные признаки:

$a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (2k-1)!!}{(2k)!!}$; $\qquad b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-1)}{3^k \cdot k!}$;

$c)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln^3 k} \cdot e^{-pk}$; $\qquad d)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k \cdot \ln k}\right)$;

$e)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \cdot k^p}{5 \cdot 6 \cdots (k+5)}$; $\qquad f)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k \cdot k!)^2}$.

5. Используя асимптотические равенства и признаки сравнения, исследуйте, при каких значениях p сходятся следующие ряды:

$a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{k}}{2k^p+1} \cdot \mathrm{tg}\frac{1}{k}$; $\qquad b)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k^p}$;

$c)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\ln\frac{k^p+1}{k^p}}$; $\qquad d)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{k} - \cos\frac{\pi}{k}\right)^p$.

6. Используя асимптотические неравенства и признаки сравнения, исследуйте сходимость следующих рядов:

$a)\ \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^p\ k}{\sqrt{k}}\,;$ $\qquad b)\ \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k^p}{\ln^2\ k}\,;$

$c)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^p\ k}{e^{\sqrt[3]{k}}}\,;$ $\qquad d)\ \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln\ k)^{\ln k}}\,.$