Занятие 1

1. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

1.1. Сравнение поведения функций. O-символика

1. Приведите примеры функций $f(x)$, для которых справедливо

$a)$ $f(x) = o\ (x), \quad x \to 0\,;$ $b)$ $f(x) = \mathcal{O}(x), \quad x \to 0\,;$
$c)$ $f(x) = o\ (x), \quad x \to 5\,;$ $d)$ $f(x) = \mathcal{O}(x), \quad x \to 5\,;$
$e)$ $f(x) = o(x), \quad x \to \infty\,;$ $f)$ $f(x) = \mathcal{O}(x), \quad x \to \infty\,;$
$g)$ $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x \to 0\,;$ $h)$ $f(x) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x \to 0\,;$
$i)$ $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right), x \to \infty\,;$ $j)$ $f(x) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right), x \to \infty\,.$

2. Верно ли утверждение: $x^3 = o\ (f(x))\ , \quad x \to 0\,,$ если
$a)$ $f(x) = x\,;$ $b)$ $f(x) = x^4\,;$
$c)$ $f(x) = x^2\ \sqrt[3]{x}\,;$ $d)$ $f(x) = (x+1)^2\,;$
$e)$ $f(x) = (x\ \mathrm{arctg}|x|)^2\,;$ $f)$ $f(x) = (x\ \cos x)^2\,?$

3. Верно ли утверждение: $\dfrac{1}{x^2} = \mathcal{O}\ (f(x))\ , x \to \infty\,,$ если

$a)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ \left(e^{|x|} + 9\right)\,;$ $b)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\,;$
$c)$ $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{2}{x^2}\right)\,;$ $d)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\,;$
$e)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{arctg}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)\,;$ $f)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{arctg}(x^2+3)\,;$
$g)$ $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+4}\,?$

4. Выясните, какие из восьми следующих утверждений верны, а какие – нет, если $x \to \infty$.

a) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = o(1)$,

b) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(1)$,

c) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = o(x)$,

d) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(x)$,

e) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = o(x^2)$,

f) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} = \mathcal{O}(x^2)$,

g) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} \sim x$,

h) $x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} \sim x^2$.

5. Приведите примеры, показывающие, что достаточные условия отношений порядка не являются необходимыми.

1.2. Действия с отношениями порядка

1. Пусть $m\,, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для $x \to \infty$ имеют место равенства:

$$a)\;\; \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n)\,, \quad m \le n\,;$$

$$b)\;\; \mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)\,, \quad m \le n\,;$$

$$c)\;\; \mathcal{O}(x^m) \cdot \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{m+n})\,.$$

2. Найдите главный член асимптотического представления следующих функций:

a) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x^2 + 1}$ при $x \to 0$;

b) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x^2 + 1}$ при $x \to \infty$;

$c)\ f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x^2+4x+1}$ при $x\to 0$;

$d)\ f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x^2+4x+1}$ при $x\to +\infty$;

$e)\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot \operatorname{arctg} x^2}{1+x^2}$ при $x\to 0$;

$f)\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot \operatorname{arctg} x^2}{1+x^2}$ при $x\to \infty$.

3. Определите порядок бесконечно малой при $x\to 0$ функции $f(x)$:

$a)\ f(x)=x-\sin\sqrt{|x|}$; $b)\ f(x)=\operatorname{tg}^2(2x^2)-3x^5$;

$c)\ f(x)=\sqrt{1-2x^4}+x^4-1$; $d)\ f(x)=x\cos x+\ln(1-x)$;

$e)\ f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln(\cos x)$; $f)\ f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}-\sqrt{\cos x}$.

4. Найти главный член асимптотического представления при $n\to\infty$ следующих последовательностей:

$a)\ f_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}-\dfrac{2}{n}$; $b)\ f_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}$;

$c)\ f_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$; $d)\ f_n=1-\sqrt[5]{\cos\dfrac{1}{n}}$;

$e)\ f_n=\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}$; $f)\ f_n=\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$.

Занятие 2

1.3. Шкала роста (убывания) основных элементарных функций и последовательностей

1. Выясните, что больше при достаточно больших значениях x :

a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ или $g(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x} + 10}$ или $g(x) = x \ln x$;

c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ или $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ или $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$?

2. Выясните, что больше при $x \to 0+0$, т.е. в достаточно малой правой полуокрестности точки $x_0 = 0$:

a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ или $g(x) = x \ln \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x} + 10}$ или $g(x) = x \ln \dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x+1}$ или $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ или $g(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln \dfrac{1}{x}$?

3. Выясните, что больше при достаточно больших значениях n :

a) $n^{100^{100}}$ или $(1.001)^n$; *b*) 100^n или $n!$;

c) n^n или $n!$; *d*) $\ln \sqrt[k]{n}$ или $\sqrt[k]{\ln n}$, $k \in \mathbb{N}$;

e) $(\ln \ln n)^{\ln n}$ или n^2 ; *f*) $(\ln n)^{\ln \ln n}$ или n ?

4. Найдите, для каких значений $a > 0$ и b при достаточно больших n справедливо неравенство

a) $a^{bn} < n^2$; *b*) $\ln^b n < a^n$; *c*) $\ln^b n > a^n$?

5. Докажите, что для произвольного числа k

$$n^k \cdot e^{-n} < \frac{1}{n^2} \quad \text{для всех } n > N\,, \quad \text{где } N = N(k)\,.$$

6. Докажите, что для $\beta > 0$ и произвольного α справедливы неравенства

$$\frac{\ln^{\alpha} n}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{n^{1+\frac{\beta}{2}}}\,; \qquad \frac{\ln^{\alpha} n}{n^{1-\beta}} > \frac{1}{n^{1-\frac{\beta}{2}}} \qquad \forall n > N = N(\alpha\,,\beta)\,.$$

2. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия. Свойства числовых рядов

1. Исходя из определения, докажите сходимость следующих рядов и найдите их суммы:

$a)$ $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots\,;$ $\qquad b)$ $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots\,;$

$c)$ $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots\,;$

$d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right);$

$e)$ $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \qquad (|q| < 1)\,;$

$f)$ $q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \qquad (|q| < 1)\,.$

2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обязан ли сходиться ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

3. Докажите расходимость рядов, используя необходимое условие сходимости:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,;$ $\qquad b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n};$ $\qquad c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}\,;$

$d)$ $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \cdots + \sqrt[n]{0,001} + \cdots\,;$

$e)$ $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha + \cdots\,;$ $\qquad f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}\,.$

Занятие 3

4. Исследуйте сходимость рядов, используя критерий Коши:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^5)}{2^n}$; *b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+5)}{n^2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\cos^2 n}{\sqrt{n}}$; *d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}$; *f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cdot \operatorname{arctg}\,(\sqrt{n}+3)}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите, что полученный из него в результате группировки членов (без перестановок) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также сходится и имеет ту же сумму. Докажите, что обратное неверно.

2.2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения, Даламбера, Коши

1. Пусть $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обязан ли сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

2. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда сходится полученный из него в результате произвольной группировки членов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(Сравните с утверждением предыдущей задачи 5).

3. Докажите, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n\,,\quad p_n > 0\,,$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}}\,.$

4. Следует ли из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}}\,,\quad p_n > 0\,,$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n\,?$

5. Приведите примеры, доказывающие утверждения замечаний 1), 2) к теоремам 6 и 7 п. 2.2 *Пособия.*

6. Докажите *усиленный признак Даламбера*:
Если для членов ряда (1), где $p_n > 0\,,$ выполнено неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1\,,$ то ряд (1) сходится.

7. Исследуйте сходимость следующих рядов, используя различные признаки:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[5]{\frac{n}{n+1}}\right);$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin^n x\,,\quad 0 \le x \le 1;$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2+3}\,;$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n + 4^n}\,;$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^8(2n-3)}{n\,(3n+1)}\,;$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 4 \cdots (3n-2)}\,;$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 2\cos(n!)}{n^3 + \ln^3 n}\,;$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,;$ *j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}(n^4)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{3n-1}}\,;$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{(n!)\,(4n)!}\,;$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n}}\,.$