МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ

Научная конференция

# Тихоновские чтения

Тезисы докладов

Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова

14 июня 2011 года

**Заседания конференции проходят**
**на факультете ВМК во втором учебном корпусе**
Московского государственного университета

Москва 2011

# ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ «ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2011»

**10.00-11.00 Открытие конференции. Ауд. 685**

Выступление декана факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, академика Моисеева Е.И.

Выступление академика Ильина В.А.

Выступление профессора Денисова А.М.

Выступление профессора Дмитриева В.И.

**11.00 Секционные заседания.**

## СЕКЦИОННЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

**Секция: «Теория дифференциальных уравнений». Ауд. 685**

Председатели академик Ильин В.А., академик Моисеев Е.И.

Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков.

Белянцев О.В., Ломов И.С. О свойстве базисности корневых функций одного сингулярного оператора второго порядка.

Моисеев Е.И. О нелинейной зависимости оптимального управления от начальных и финальных данных.

**Секция: «Математическая физика». Ауд. 613**

Председатель профессор Дмитриев В.И.

Ильинский А.С. Исследование антенных решеток из волноводов сложного поперечного сечения.

Дмитриев В.И. О вторых производных объемного потенциала и интегральных уравнениях электродинамики.

Дмитриев В.И., Барашков И.С. Трёхмерное моделирование морских зондирований полем мощного горизонтального электрического диполя.

Березина Н.И., Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Итерационный метод решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием квазиодномерного приближения.

Еремин Ю.А., Гришина Н.В. Анализ плазмонных резонансов локальных структур методом дискретных источников.

Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е. Математические задачи теории волноведущих систем при наличии входящих ребер.

Делицын А.Л., Круглов С.И., Трошина И.К. Вещественные и комплексные моды волноводов и их свойства.

Боголюбов А.Н., Мухартова Ю.В., Гао Ц. Начально-краевая задача для электромагнитного поля в области с киральным заполнением.

Баев А.В. Математическое моделирование рефракции акустической волны в окрестности каустики.

Лопушенко В.В. Моделирование рассеяния света шероховатой поверхностью на основе теории среднего поля.

Барсукова М.Г. Быков А.А. Применение метода Галёркина для расчета распространения волн в слоистых средах с полупрозрачными экранами.

**Секция: «Обратные и некорректные задачи».** **Ауд. 609**

Председатель профессор Денисов А.М.

Денисов А.М. Задача определения начального условия для уравнения диффузии по дополнительной информации, представляющей собой внешний объемный потенциал.

Соловьев В.В. Разрешимость обратной задачи определения коэффициента в эллиптическом уравнении.

Костин А.Б. Корректность одной обратной задачи с нелокальным условием наблюдения.

Леонов А.С. Экстраоптимальные регуляризирующие алгоритмы для решения некорректных задач.

Терновский В.В., Хапаев М.М. Некорректные задачи, связанные с периодическими функциями

Боголюбов А.Н., Кобликов А.А., Шапкина Н.Е. Анализ и синтез антенных решеток с фрактальными характеристиками излучения.

Насонов А.В. Регуляризирующие методы суперразрешения изображений.

Павельчак И.А., Туйкина С.Р. О численном решении обратной задачи для модифицированной модели Фитц-Хью-Нагумо.

Прилепко А.И. Обратные нелокальные задачи для нестационарных уравнений.

Захаров Е.В., Калинин А.В. Метод вычисления электрического поля.

**Секция «Математическое моделирование и вычислительные методы».** **Ауд. 605**

Председатель профессор Гулин А.В.

Савенкова Н.П., Анпилов С.В. Двухфазная трёхмерная модель МГД-стабильности алюминиевого электролизёра

Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения задач газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках.

Поляков С.В. Моделирование процессов полевой эмиссии с поверхности наноструктур.

Александров П.А., Еленин Г.Г. О консервативности вычислительных методов для задачи о движении материальной точки в поле кубического потенциала.

Гулин А. В. Об асимптотической устойчивости нелокальных разностных схем для уравнения теплопроводности.

Гулин А.В., Мокин А.Ю. О равномерной по параметру устойчивости семейства разностных схем с весами.

Моисеев Т.Е. Об интегральном представлении решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Никольский И.М. О влиянии спектра матрицы на сходимость некоторых итерационных методов решения СЛАУ

Трощиев Ю.В. Монотонизация разностных схем внедрением специального оператора.

**Секция: «Системный анализ».** **Ауд. 73**

Председатель академик Куржанский А.Б.

Жуковский Е.С. Вольтерровы по А.Н. Тихонову накрывающие отображения

Жуковский С.Е. Приложение условно накрывающих отображений к интегро-дифференциальным уравнениям.

Плужникова Е.А. Один метод исследования разрешимости задач управления для дифференциальных уравнений.

Максимова И.С. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства.

Гималдтинов И.Ф. Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста.

Павлова Н.Г. Необходимые условия оптимальности для задач с фазовыми ограничениями.

**Секция: «Вычислительная математика».** **Ауд. 606**

Председатель профессор Кобельков Г.М.

Василевский Ю.В., Никитин К.Д., Ольшанский М.А., Терехов К.М. Численный метод расчета течений вязкопластичных сред со свободными поверхностями.

Петров И.Б. Моделирование волновых процессов в гетерогенных геологических методах сеточно-характеристическими методами.

Богачев К.Ю. Решение задачи фильтрации на параллельных ЭВМ.

Безродных С.И., Власов В.И. О гармонических отображениях плоских областей.

Корнев А.А. R задаче нелокальной стабилизации.

Кобельков Г.М., Друца А.В. О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана.

**Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром».** **Ауд. 706**

Председатель профессор Бутузов В.Ф.

Букжалёв Е.Е., Чернаков В.В. Асимптотическое разложение погранслойного решения задачи Коши в случае кратного корня вырожденного уравнения

Давыдова М.А., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных задачах реакция-диффузия-адвекция.

Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Решение вида контрастных структур типа ступеньки для системы эллиптических уравнений с двумя типами функций переходного слоя.

Левашова Н.Т., Петровская Е.С. Контрастная структура типа ступеньки для системы эллиптических уравнений.

Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Стационарные фронты в интегропараболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия.

Нефедов Н.Н, Левашова Н.Т., Ягремцев А.В. Решение вида КСТС в нестационарной задаче реакция-адвекция-диффузия в случае баланса адвекции.

Быков А.А., Шарло А.С. Нестационарные контрастные структуры для обобщенного уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова

Терентьев М.А. О необходимом условии существования решения одной начально-краевой задачи для уравнения КППФ с параметром.

**Секция: «Обратные задачи управления».** **Ауд. 612**

Председатель академик Осипов Ю.С.

Бондаренко Н.В., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В. О решении задачи управляемости для одной нелинейной трехмерной системы со скалярным управлением.

Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Исследование модели разработки газового месторождения с участием прогноза цен, изменяющихся во времени.

Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Диффузия информации в социальной группе: построение оптимальных программ и синтеза.

Киселёв Ю.Н. Теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина.

Асеев С.М., Veliov V.M. Принцип максимума Понтрягина для «обгоняющего» оптимального управления.

Васильев Ф.П., Антипин А.С. , Артемьева Л.А. Экстрапроксимальный метод поиска точки равновесия в седловых играх двух лиц.

Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В.,Лукьянова Л.Н., Пивоварчук Д.Г. Задачи оптимизации экономических показателей процессов разработки открытых карьеров.

Максимов В.И. Об отслеживании траектории динамической системы методом экстремального сдвига.

Никольский М.С. Изучение задачи оптимального быстродействия для управляемого варианта модели А.Д.Базыкина «Хищник-Жертва».

Лукьянова Л.Н. Задача терминального управления для линейной системы со смешанными ограничениями.

Розенберг В.Л. Задача реконструкции возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении по измерениям части фазовых координат.

Жуковский В.И. Новое равновесие в многошаговой конфликтной задаче при неопределенности.

Вещинская В.В. Об одной задаче оптимального управления распределённой системой первого порядка.

Самсонов С.П., Кулевский А.В. Численное решение линейной задачи быстродействия с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей.

Винников Е.В. Об одной модели лечения хронического миелоидного лейкоза.

**Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление». Ауд. 72**
Председатель академик РАН Коровин С.К.

Рябков О.И. Бифуркационный анализ некоторых гидродинамических и МГД течений.

Терновский В.В., Хапаев М.М. Моделирование переходных режимов в задачах управления.

Гончаров О.И. Использование метода трансверсальных функций для решения задачи стабилизации билинейных систем.

Карамышева Т.В. Диффузионный хаос в модели реакция-диффузия для возбудимых сред.

Миняев С.И. К вопросу об одновременной стабилизации динамических объектов с соизмеримыми запаздываниями.

Буданова А.В. О построении функциональных наблюдателей для систем с запаздыванием.

Родиченко Н.С. Моделирование и оптимизация нелинейных методов индивидуализированной молекулярной терапии онкозаболеваний.

**Секция: «Вычислительные технологии и моделирование». Ауд. 607**
Председатели академик Марчук Г.И., чл.-корр. Тыртышников Е.Е.

Ершов Н.М. Имитационное моделирование с помощью Марковских систем.

Галинов А.С., Капырин И.В. Демонстрационная численная модель фильтрации для выводимого из эксплуатации промышленного уран-графитового реактора.

Заячковский А.О. Экологические риски и выбор оптимального маршрута судна.

**Секция: «Исследование операций и задачи оптимизации». Ауд. 713**
Председатель профессор Васин А.А.

Васин А.А., Уразов А.С. Оптимальные стратегии применения пограничных средств обнаружения.

Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С. Механизмы подавления коррупции.

Вржещ В.П. Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики на примере России, Украины и Финляндии.

Белянкин Г.А., Таразевич А.В. Исследование оптимального контракта в задаче мотивирования агентов принципалом в модели с двумя агентами и случайным исходом.

Морозов В.В., Муравей Д.Л. Нижняя оценка американского альтернативного опциона на два актива.

Измаилов А.Ф., Усков Е.И. О применении Ньютоновских методов к системе условий оптимальности Ф. Джона.

**Секция: «Системное программирование и информационные технологии». Ауд. 707**
Председатель Королёв Л.Н.

Намиот Д.Е. Экспертная система на базе точек доступа Wi-Fi.

Мальковский М.Г., Старостин А.С., Арефьев Н.В. Система морфо-синтаксического анализа Treeton: аппарат тринотаций и динамическое ранжирование.

Мальковский М.Г., Арефьев Н.В. Учет лексико-семантической информации в системе Treeton.

# ТЕЗИСЫ КОНФЕРЕНЦИИ

## ДИФФУЗИЯ ИНФОРМАЦИИ В СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЕ: ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ И СИНТЕЗА

Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,*
*e-mail: asn@cs.msu.su, kiselev@cs.msu.su*

В докладе предполагается изложить результаты авторов для некоторых модифицированных управляемых моделей распространения (диффузии) информации в социальной группе [3–5]. Динамика процесса описывается одномерным управляемым дифференциальным уравнением Риккати. Отличие изучаемых моделей от исходной модели [2] состоит в выборе оптимизируемого функционала; кроме того, фазовая переменная имеет безразмерный вид. Рассмотрены два варианта выбора оптимизируемого функционала. Поставленные задачи оптимального управления решаются с привлечением принципа максимума Понтрягина [1]. Показано, что оптимальная программа является релейной функцией времени, имеющей не более одной точки переключения. Выполненный теоретический анализ задачи приводит к построению одномерных выпуклых задач минимизации для нахождения точки переключения оптимального управления. Построение оптимальных законов управления в форме программы дополнено нахождением оптимальных синтезирующих управлений (обратная связь). Наиболее полное изложение обсуждаемых вопросов содержится в статье [5].

Работа поддержана грантами НШ-65690.2010.1, РФФИ 09-01-00378-а.

**Литература**

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М. 1961.
2. Измоденова К.В., Михайлов А.П. Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Матем. моделирование, – 2005. Т. 17. №5. С. 67–76.
3. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Построение оптимальных законов управления для модели диффузии информации в социальной группе // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. МАКС Пресс. – 2009. – Вып. 4. С. 4–33.
4. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Модели диффузии информации в социальной группе: построение оптимальных программ // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под ред. Ю.С.Осипова, А.В. Кряжимского. МАКС Пресс. – 2010. – Вып. 5. С. 5–27.
5. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Оптимальные законы управления для модели диффузии информации в социальной группе // Прикладная математика и информатика. – М.: МАКС Пресс. – 2010. № 35. С. 46–105.

## О КОНСЕРВАТИВНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОЛЕ КУБИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Александров П.А.[1], Еленин Г.Г.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М. В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]petr_aleksandrov@mail.ru, [2)]elenin2@rambler.ru*

Математическое моделирование атомно-молекулярного движения на высокопроизводительных вычислительных комплексах является актуальной проблемой современной фундаментальной науки и нанотехнологических приложений [1]. Для получения надежных результатов моделирования следует применять вычислительные методы, сохраняющие значительное число важнейших глобальных характеристик точного решения исходной задачи. К таким характеристикам относятся симплектичность, обратимость во времени и консервативность [2].

В работе рассматривается модельная задача о движении материальной точки в силовом поле кубического потенциала. Цель работы заключается в исследовании возможности построения консервативного, симметричного и симплектического вычислительного метода для приближенного решения этой задачи. Метод строится на основе семейства трехстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты. Система нелинейных разрешающих уравнений семейства методов дополняется либо уравнением сохранения полной энергии, либо условием минимума модуля приращения полной энергии на одном шаге вычислительного метода. Ранее, в работе [3], исследовался тот же вопрос на основе семейства двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты.

Установлены условия разрешимости расширенной системы нелинейных уравнений семейства трехстадийных методов. Получены результаты сравнительного анализа новых симметрично-симплектических методов.

**Литература**


1. Еленин Г. Г. Нанотехнологии, наноматериалы, наноустройства. Информационные технологии и вычислительные системы, 2002, 2, 32-56.
2. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. Springer, Berlin, 2006, 515 p.
3. Еленин Г. Г., Шляхов П. И. О консервативности двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты и метода Штермера-Верле. Дифференциальные уравнения, 2010, том 46, № 7, 983-989.


## ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ «ОБГОНЯЮЩЕГО» ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ


Асеев С.М.[1], Veliov V.M.[2]

[1)]*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, e-mail: aseev@mi.ras.ru*
[2)]*Vienna University of Technology, e-mail: veliov@tuwien.ac.at*


В докладе рассматривается один класс неавтономных задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, возникающих в экономике при исследовании процессов экономического роста. Данный класс задач характеризуется фиксированным начальным состоянием системы, отсутствием каких-либо ограничений на поведение допустимой траектории на бесконечности и функционалом, задаваемым несобственным интегралом с дисконтированием. В ситуации, когда параметр дисконтирования достаточно большой при помощи классического метода игольчатых вариаций получен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащий однозначное описание сопряженной переменной. По форме данный результат аналогичен варианту принципа максимума Понтрягина для задач с доминированием дисконтирующего множителя полученному ранее в работах [1], [2]. Однако, он применим и в ситуации, когда интеграл в функционале полезности расходится (к $\infty$). В последнем случае используется понятие “обгоняющего” оптимального управления (см. [3]). Полученный вариант принципа максимума применим к ряду задач оптимизации экономического роста, не укладывающихся в рамки стандартной теории. Доказательство полученного результата, а также иллюстрирующий экономический пример приведены в [4].


Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты No 09-01-00624-а и No 10-01-91004-АНФ_а) и Австрийского научного фонда (FWF, grant No I 476-N13).

**Литература**

1. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. (2004) **43**, pp. 1094-1119.
2. Асеев С.М., Кряжимский А.В., Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // – Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 2007. Т. 257. С. 5-271.
3. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A., Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems // Springer: Berlin. – 1991.
4. Aseev S.M., Veliov V.M., Maximum principle for problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (in press).

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

Баев А.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: baev@cs.msu.su*

В работе рассматриваются вопросы, связанные с расчётом волновых полей в акустической среде в окрестности каустики. Исследуется задача о рефракции плоской волны (импульса) и предлагаются методы её решения, не использующие асимптотических приближений, а основанные на точных динамических рассмотрениях. При построении функции Грина краевой задачи использован метод разложения решения по гладкости с разрывами на характеристиках. С помощью метода разделения переменных найдены решения вспомогательной задачи Гурса, являющиеся функциями гипергеометрического типа. При этом функция Грина оказывается решением интегрального уравнения первого рода типа Вольтерра.

Предложены консервативные разностные схемы (РС) для гиперболических систем уравнений с коэффициентами, имеющими особенность. Характерным свойством этих РС является их однородность, что влечёт независимость от шага дискретизации. Доказано, что аппроксимирующие свойства РС определятся порядком особенности коэффициента исходного уравнения. Так, например, для линейного возрастания скорости в окрестности каустики порядок особенности равен 1/6, а погрешность решения при этом составляет менее 1%, что является вполне приемлемой точностью для качественного и количественного изучения волновых полей в различных областях естествознания, таких как геофизика, акустика, оптика.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ПОЛУПРОЗРАЧНЫМИ ЭКРАНАМИ

Барсукова М.Г.[1] Быков А.А.[2]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]barsukova.mariya@physics.msu.ru, [2)]abkov@yandex.ru*

Рассматривается распространение электромагнитных волн в периодической плоскослоистой среде с несколькими полупрозрачными экранами. Изучаемая модель, как одна из простейших форм оптического волновода [1], позволяет рассчитать процесс распространения волн в неоднородных периодических структурах, а также может являться предметом изучения как элемент интегральных оптических цепей.

Поставленная задача решается с помощью одной из разновидностей метода Галеркина, а именно: методом проекционного сшивания [2]. Применение данного метода основывается на учете условий непрерывности поля и его первой производной в плоскостях расположения полупрозрачных экранов. Задача для уравнений Максвелла с условиями излучения приводится к разностной матричной краевой задаче для амплитуд парциальных волн с граничными условиями типа условий излучения. Матричная краевая задача решается методом прогонки.

Разработанный в работе алгоритм расчета позволяет качественно и количественно изучить эффект трансформации мод, проходящих через волновод, а также эффект рассеяния мод на неоднородном полупрозрачном экране. Разработанный алгоритм позволяет рассчитывать разветвления оптических волноводов, сочленения оптических волноводов с разным сечением. Данный алгоритм можно также использовать для решения обратной задачи оптимального сочленения волноводов с разным поперечным сечением, и вместе с тем для расчета трансформаторов, преобразующих волны разных типов. Разработан также алгоритм расчета диаграммы направленности излучающей антенны, построенной на основе периодической волноводной решетки.

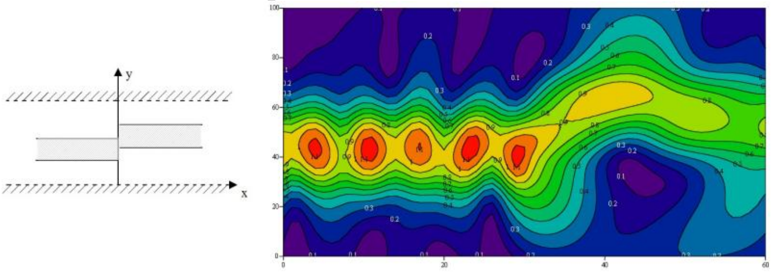

Рисунок 1. Пример работы алгоритма для стыка двух волноводов со сдвигом.

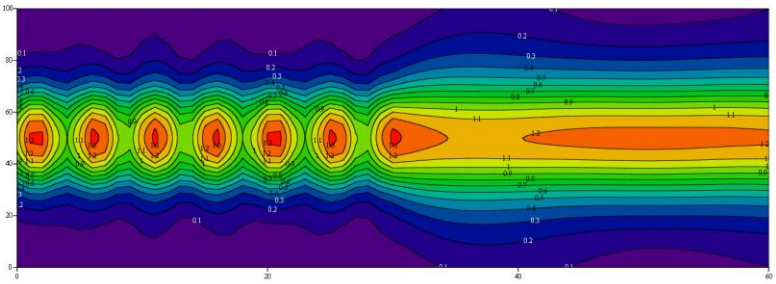

Рисунок 2. Рассеяние на полупрозрачном экране.

**Литература**


1. Унгер Х.-Г. Планарные и оптические волноводы // М.: Мир, 1980 – 654с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина // М.: - Мир, 1988 - 352с.


## О ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ


Безродных С.И.[1], Власов В.И.[2]

*ВЦ РАН, e-mail: [1)]sergeyib@pochta.ru,[2)]vlasov@ccas.ru*


Согласно теореме Радо-Кнезера-Шоке [1], для того чтобы гармоническое отображение $F$: $Z \to W$ жордановых областей $Z$ и $W$ осуществляло гомеоморфизм их замыканий, достаточно, чтобы область $W$ была выпуклой. Однако при численной реализации с соблюдением этого достаточного условия нередко оказывалось, что приближенное отображение $F_h$, построенное методом Уинслоу [2] с использованием конечно-разностных схем [3-6], тем не менее, не осуществляло гомеоморфизма областей. Эта проблема рассматривалась в ряде исследований (см. [3]-[6]). В настоящей работе показано, что возникающее “противоречие” вызвано недостаточной точностью указанного способа построения функции $F$. Если же отображение $F$ строить с помощью метода мультиполей [7], обеспечивающего высокую ($\sim 10^{-10}$) относительную точность для $F$ в $C(Z)$-норме, то противоречия с теоремой Радо – Кнезера – Шоке не возникает.

Пусть односвязная область $Z$ расположена на комплексной плоскости $z = x + i\,y$, а ее граница Г состоит из конечного числа ляпуновских дуг $\Gamma_k$, соединяющихся под углами $\pi\alpha_k$, $\alpha_k \in [0, 2]$. Пусть, далее, квадрат $Q = [0,1] \times [0,1]$ расположен на плоскости $w=u + i\, v$, а функция $w = f(z) = u\,(x, y) + i\, v\,(x, y)$ представляет собой гармоническое отображение области $Z$ на $Q$, обеспечивающее гомеоморфизм замыканий этих областей. В работе рассмотрен вопрос о поведении отображения $f$ вблизи геометрических особенностей области $Z$. Получены асимптотики функции $f$ вблизи угловых точек области $Z$ и дано описание структуры семейств $\{u\,(x, y) = a\}$ и $\{v\,(x, y) = b\}$, где $a$ и $b$ – вещественные числа из отрезка [0, 1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00837), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики" и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

**Литература**


1. Duren P. Harmonic mappings in the plane. "Cambrige Tracts in Mathematics". Vol. 156, Cambrige: Cambrige University Press, 2004.
2. Winslow A. Numerical solution of the quazi-linear Poisson equations in a nonuniform triangle mesh // J. Comp. Phys. 1966. V. 1. P. 149-172.
3. Roache P.J., Steingerg S. A new approach to grid generation using a variational formulation // Proc. AIAA 7-th CFD conference, Cincinnati. 1985. P. 360-370.
4. Knapp P., Luczak R. Truncation error in grid generation: a case study // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 1995. V. 11. P. 561-571.
5. Иваненко С.А. Адаптивно-гармонические сетки. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1997.
6. Азаренок Б.Н. О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 826-839.
7. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.


## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТРАКТА В ЗАДАЧЕ МОТИВИРОВАНИЯ АГЕНТОВ ПРИНЦИПАЛОМ В МОДЕЛИ С ДВУМЯ АГЕНТАМИ И СЛУЧАЙНЫМ ИСХОДОМ

Белянкин Г.А., Таразевич А.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова*

В работе рассмотрены модели с тремя участниками – принципалом и двумя агентами. Принципал – лицо, обладающее некоторым количеством свободных средств. С их помощью он пытается стимулировать агентов на заключение некоторого оптимального числа договоров (с клиентами) с целью максимизации своей (принципала) собственной прибыли. Принципал имеет неограниченное количество средств (т.к. он может воспользоваться помощью головного офиса), и его цель – составить трудовой договор с агентами таким образом, чтобы прибыль от принесённых ими договоров была максимальной. Прибыль от каждого договора будем считать постоянной и равной Y. Для того чтобы заключить некоторое количество договоров и получить суммарную прибыль Y , агенту необходимо провести некоторое количество встреч n. Вероятность успеха в одной встрече равна p и q для агента высокого и низкого типов соответственно, причем p>q. Усилие для проведения n встреч для агента высокого типа равно $C^H(N)$, для агента низкого типа - $C^L(N)$, причём выполнено $C^H(0) = C^L(0) = 0$ и $\forall N > 0$ $C^H(N) < C^L(N)$. Принципал не знает, к какому типу принадлежит конкретный агент, а также какое количество встреч провели агенты, он знает ту прибыль, которую принёс каждый из них. Стимулирующая схема зависит только от той прибыли, которую принесли агенты. Выигрыш агента типа А (высокого либо низкого), который провёл N встреч, равен $I(Y^A)-C^A(N)$. Поскольку результат агента $Y^A$ – случайная величина, распределённая по биномиальному закону, то выигрыш агента А также является случайной величиной. Таким образом, при принятии решения о заключении контракта, агент руководствуется своим средним (ожидаемым) выигрышем, равным $\sum_{k=0}^{N} C_N^k \cdot {p_A}^k \cdot (1-p_A)^{N-k} \cdot I(k) - C^A(N)$. Цель принципала – максимизировать свой ожидаемый выигрыш, равный

$$n \cdot p - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot I(k) + m \cdot q - \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot q^k \cdot (1-q)^{m-k} \cdot I(k) =$$
$$= n \cdot p - E_n^p(I(Y)) + m \cdot q - E_m^q(I(Y))$$

Несмотря на то, что рассмотрена модель только с двумя агентами, нахождение оптимальной схемы в данной модели является значительно более сложной задачей, чем в детерминированном случае. Решение в явном виде не найдено, однако указан алгоритм нахождения оптимального решения. Также были доказаны следующие результаты:

1. Для любого количества желаемых принципалу (индуцируемых) встреч, оптимальная схема устроена так, что агент низкого типа получает нулевую прибыль.
2. Было найдено достаточное условие того, что оптимальная схема индуцирует не меньшее количество встреч для агента высокого типа, чем для агента низкого типа.
3. Задачи, в которых n>m+2, были сведены к задаче, в которой n=m.

Таким образом, задача в её изначальной постановке была значительно упрощена.

**Литература**


1. Doherty, N. A. and P. D. Thistle: Adverse Selection with Endogenous Information in Insurance Markets // Journal of Public Economics. 1996. №63. P., 83-102.
2. Sanford J.\,Grossman, Oliver D.\,Hart: An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51. №1. P.,7-45.


## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ


Березина Н.И.[1], Дмитриев В.И.[2], Мерщикова Н.А.[3]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, ,*
*e-mail: [1)]berezina@cs.msu.su, [2)]dmitriev@cs.msu.su, [3)]mersikov@cs.msu.su*


На примере численного решения обратной задачи электромагнитных зондирований для квазислоистой среды рассматривается итерационный метод решения двумерной обратной задачи [1].

Обратная задача формулируется как задача нахождения электропроводности квазислоистой среды по измеренным на земной поверхности значениям импеданса магнитотеллурического поля. Значения импеданса измерены в некотором множестве точек наблюдения на поверхности двумерной среды для набора частот электромагнитного поля.

Решение обратной задачи состоит в нахождении распределения электропроводности среды, минимизирующей функционал, в котором суммируются невязки для всех частот электромагнитного поля по всем точкам измерений электромагнитного поля.

При численном решении обратной задачи на каждой итерации выполняется минимизация функционала невязки с помощью регуляризированного варианта метода Ньютона-Канторовича [2], при этом для решения прямой задачи в каждой точке наблюдения используется одномерное приближение.

При переходе к следующей итерации для найденного на предыдущей итерации распределения электропроводности решается прямая задача вычисления импеданса электромагнитного поля на поверхности среды методом двумерных интегральных уравнений [3]. Полученное решение прямой двумерной задачи используется для внесения поправок во входную информацию для минимизации функционала невязки на следующей итерации.

Предлагаемый подход позволяет значительно уменьшить число решений прямых двумерных задач, на которые в процессе численного решения обратной задачи приходятся основные затраты времени вычислений.

**Литература**


1. Березина Н.И., Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Квазиодномерный метод решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования // Прикладная математика и информатика. Изд. Московского университета – 2010, № 35, с. 5-16.
2. Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Кулик Н.И. Регуляризирующие алгоритмы для нелинейных задач и обратная задача магнитотеллурического зондирования // Вычислительные методы и программирование. Изд. Московского университета. - 1973, вып. 20, с. 158-174.
3. Дмитриев В.И., Барашков И.С., Мерщикова Н.А. Математическое моделирование магнитотеллурических полей в неоднородных средах // М.: Изд. Московского университета, 1985.


## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭВМ


Богачев К.Ю.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: bogachev@mech.msth.msu.su*


В докладе рассматривается одна из используемых для практических расчетов нефтяных и газовых месторождений постановок задачи фильтрации вязкой сжимаемой многофазной многокомпонентной смеси в трехмерной пористой среде.

Описываются основные физические эффекты, важные для инженеров-нефтяников, и их математические модели.

Рассматриваются методы аппроксимации по времени и по пространству, а также алгоритмы решения получающейся на каждом временном шаге дискретной системы нелинейных алгебраических уравнений и построения эффективного предобуславливателя для линейной системы с ее якобианом на параллельных ЭВМ.

Излагаются основные проблемы, возникающие при расчетах реальных задач фильтрации на параллельных вычислительных установках. Приводятся сравнительные результаты расчетов для моделей реальных нефтяных месторождений.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВХОДЯЩИХ РЕБЕР


Боголюбов А.Н.[1], Ерохин А.И.[2], Могилевский И.Е.[3]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]bogan7@yandex.ru, [2)]forlector@mail.ru, [3)]mogilev@phys.msu.ru*


Хорошо известно, что наличие угловых точек в сечении волновода приводит к появлению особенностей в решениях краевых задач [1, 2]. Это существенно осложняет применение численных методов для расчета подобных систем [3].

Пусть волновод представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega,\, z \in (-\infty, +\infty)\}$, граница области $\partial\Omega$ содержит угловую точку O с углом произвольной величины. Предполагается, что вне некоторой окрестности угловой точки граница области $\partial\Omega$ гладкая, а внутри нее совпадает с сектором. Математическая постановка задачи для собственных векторов компонент поля $\vec{A}=\{H_\perp, E_z\}$ и собственных значений $\beta^2$ ($\beta$ — постоянная распространения) приведена в работах [3,4], где показано, что эта задача порождает ограниченный оператор $T:(L_2(\Omega))^3 \to W$ в гильбертовом пространстве $W = H_0(div) \oplus \dot{H}^1(\Omega)$, где $H_0(div)=\{H_\perp \mid H_\perp \in (L_2(\Omega))^2,\, divH_\perp \in L_2(\Omega),\, H_n|_{\partial\Omega}=0\}$.

Оператор T компактен в подпространстве V пространства W, выделяемом дополнительным условием $rotH_\perp = -ikE_z$, которое понимается в смысле обобщенных функций.

Получено асимптотическое представление решения. Для дискретизации задачи применяется метод конечных элементов с использованием сингулярных пробных функций, учитывающих особенность решения вблизи угловой точки поперечного сечения. Доказана сходимость приближенного решения к точному со скоростью порядка h в пространстве W и со скоростью порядка $h^2$ в пространстве $(L_2(\Omega))^3$. Получена также оценка скорости сходимости собственных значений

$$\left|\lambda - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ih}\right| < Ch^2.$$

На основе построенного асимптотического представления для случая скалярной задачи предложен и реализован алгоритм численного расчета волноведущей системы с входящим ребром. Знание особенности решения в окрестности угловой точки границы позволило существенно повысить скорость сходимости.

**Литература**


1. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды Московского Математического Общества, Т.16, 1967, С.227-313.
2. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука — 1991.
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Особенности нормальных волн неоднородного волновода с входящими ребрами // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787-794.
4. Делицын А.Л. О проблеме применения метода конечных элементов к задаче вычисления мод диэлектрических волноводов. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39, № 2.С.315-322.


## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С ФРАКТАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ИЗЛУЧЕНИЯ


Боголюбов А.Н.[1], Кобликов А.А.[2], Шапкина Н.Е.[3]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]bogan7@yandex.ru, [2)]koblikov@physics.msu.ru, [3)]neshapkina@mail.ru*


В работе рассматривается решение задачи синтеза фрактальных диаграмм направленности антенн (ДНА) методами математического моделирования [1-3] для различных типов излучающих систем (ИС) (одномерные и двумерные антенные решетки дискретных излучателей, концентрические антенные решетки, непрерывные линейные ИС). Применение фрактального подхода является оправданным, поскольку возможность синтеза фрактальных характеристик излучения может быть полезна для ряда прикладных направлений.

Основная задача построения антенны – это, задача синтеза, т.к. на практике по заданным выходным параметрам необходимо сначала синтезировать, а затем реализовать распределение источников, которое представляет собой задачу синтеза схемы антенны и включает в себя как выбор конструкции антенны, так и расчет параметров ее элементов по заданным токам [1-6]. В общем случае задача синтеза формулируется так: задана пространственная ДНА; производя синтез с помощью функций Вейерштрасса, необходимо определить расположение излучателей (или форму раскрыва) и токи, возбуждаемые излучателями (распределение поля по раскрыву), которые обеспечат получение заданной ДНА. Идея реализации характеристик излучения с повторяющейся структурой на различных масштабах, лежащая в основе теории фрактального синтеза, отличает метод фрактального синтеза от традиционного, в котором синтезируются гладкие ДНА.

В результате анализа синтезированных ДНА выяснилось, что при помощи трех переменных (распределения излучателей по пространству, амплитуды и фазы тока возбуждения решетки) можно управлять ДНА, а фрактальная размерность ДНА может контролироваться распределением тока по решетке.

Антенные системы на основе фрактальных элементов обладают характеристиками в ряде случаев существенно улучшающими свойства классических антенн. Использование методики математического моделирования является эффективным и позволяет априори установить оптимальные параметры подобных систем. Дальнейшее развитие исследований может идти по двум основным направлениям: во-первых, это исследование трехмерных ИС на основе фрактальных излучающих элементов; во-вторых, это решение полной задачи синтеза фрактальных антенн, включающей в себя установление оптимального распределения источников, а также токов, запитывающих антенну. Для решения этих задач весьма эффективным являлось бы использование общих методов синтезирования электродинамических систем с использованием методов регуляризации А.Н. Тихонова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00408).

**Литература**


1. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом // М.: «Советское радио» – 1980.
2. Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Гусевский В.И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн // М.: Сайнс-пресс – 2005.
3. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки // М.: Университетская книга – 2-е издание - 2005.
4. Liang X., Zhensen W., Wenbung W. // Electron. Lett. – 1996. - V.32. № 21. P.1940-1941.
5. Werner D.H., Werner P.L. // Radio Sci. – 1995. - V.30. №1. P.29-45.
6. Боголюбов А.Н., Кобликов А.А., Шапкина Н.Е. // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. № 6. С.3-10.


## НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТИ С КИРАЛЬНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ


Боголюбов А.Н.[1], Мухартова Ю.В.[2], Гао Ц.[3]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]bogan7@yandex.ru, [2)]muhartova@yandex.ru, [3)]gaojxing@gmail.com*


Целью работы является исследование разрешимости задачи о возбуждении электромагнитных колебаний локальными источниками в области

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{K} \Omega_k$$

с кусочно-постоянным киральным заполнением: $\varepsilon = \varepsilon_k > 0,\ \mu = \mu_k > 0,\ \ \xi = \xi_k \geq 0,$ $\sigma = \sigma_k \geq 0$ в $\Omega_k$ $k = \overline{0, K}$. Область $\Omega$ либо ограничена идеально проводящей достаточно гладкой поверхностью $\Gamma$, либо является дополнением к идеально проводящей области $\tilde{\Omega}$ с границей $\Gamma$, и в этом случае все подобласти $\Omega_k$, кроме $\Omega_0$, являются ограниченными, а

$\xi_0 = \sigma_0 = 0$. С учетом материальных уравнений

$$\mathbf{D}_k = \varepsilon_k \mathbf{E}_k + i\xi_k \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{H}_k = i\xi_k \mathbf{E}_k + \mu_k^{-1} \mathbf{B}_k, \quad k = \overline{1, K},$$

задача о возбуждении электромагнитных колебаний током j в области $\Omega$ имеет вид

$$\left(\varepsilon_k + \xi_k^{\,2}\mu_k\right)\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} + i\xi_k\mu_k \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H}_k + \sigma_k \mathbf{E}_k = -\mathbf{j}, \text{ в } \Omega_k \times \left(0, T\right],$$

$$-i\xi_k\mu_k \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E}_k = 0, \text{ в } \Omega_k \times \left(0, T\right],$$

$$\left[\mathbf{E}_j, \mathbf{n}\right] = \left[\mathbf{E}_k, \mathbf{n}\right], \ \left[\mathbf{H}_j, \mathbf{n}\right] = \left[\mathbf{H}_k, \mathbf{n}\right] \text{ на } \Sigma_{jk} \times [0, T], \ \left[\mathbf{E}_0, \mathbf{n}\right] = 0 \text{ на } \Gamma \times [0, T],$$

$$\mathbf{E}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0, \ \mathbf{H}\big|_{t=0} = \mathbf{H}_0 \text{ в } \Omega,$$

где j, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – локальные функции.

При достаточной гладкости поверхности $\Gamma$ доказано, что задача имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in L^\infty\left(0, T; D(A)\right)$, где

$$D(A) = \left\{\Phi \middle| \Phi = \{\varphi, \psi\}, \ \varphi, \psi \in \left(L_2(\Omega)\right)^3, \right.$$
$$\left. rot\varphi, \ rot\psi \in \left(L_2(\Omega)\right)^3, \ \left[\mathbf{n}, \varphi\right]_\Gamma = 0\right\}$$


**Литература**

1. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. Математические модели киральных волноводов// Математическое моделирование – 2007. Т.19, № 5. С. 3-24.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике // Москва “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы – 1980.


## О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СО СКАЛЯРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ


Бондаренко Н.В.[1], Хайлов Е.Н.[2], Григорьева Э.В.[3]

[1)] *Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: nataliabonda@mail.ru*
[2)] *Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: khailov@cs.msu.su*
[3)] *Texas Woman’s University, Denton, TX 76204, USA, e-mail: egrigorieva@mail.twu.edu*


Целью работы является решение задачи управляемости для нелинейной системы трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t)y(t)z(t) + u(t)\left(m - x(t)\right), \ t \in [0, T], \\ \dot{y}(t) = -x(t)y(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t)z(t) - bz(t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \ x_0 \in \left(0, m\right), y_0 > 0, z_0 > 0, \\ x(T) = x_1, y(T) = y_1, z(T) = z_1, \ x_1 > 0, y_1 > 0, z_1 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

моделирующей управляемый аэрацией процесс биологической очистки сточных вод с использованием теплового метаболизма термофильных аэробных бактерий. Уравнения системы (1) описывают изменение концентрации кислорода, загрязняющих веществ и термофильной биомассы соответственно. В качестве допустимых управлений $D(T)$ рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые для почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничению в виде отрезка.

Сначала для системы (1) изучаются свойства ее решений $x(t), y(t), z(t)$. Доказывается, что они определены на всем отрезке $[0, T]$, принимают положительные значения и ограничены. Далее, для системы (1) исследуется соответствующее множество достижимости $X(T)$, которое служит основным инструментом при решении задачи управляемости. Из [1] и свойств решений системы (1), приведенных выше, вытекает, что множество $X(T)$ является компактным множеством, расположенным в положительном октанте. После чего, привлекая результаты из [2], для множества достижимости $X(T)$ строится параметризация с помощью моментов переключения кусочно-постоянных управлений. Показывается, что каждой внутренней точке множества $X(T)$ соответствует управление ровно с тремя переключениями, а каждой граничной точке отвечает такое же управление с не более чем двумя переключениями.

Задача управляемости заключается в отыскании момента времени $T$ и управления $u(\cdot) \in D(T)$, которое переводит систему (1) из заданной начальной точки $w_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ в заданную конечную точку $w_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$. Используя построенную параметризацию множества $X(T)$, задача управляемости может быть переформулирована в задачу конечномерной минимизации некоторой функции.

Используемый метод решения задачи управляемости для системы (1) реализован на языке программирования **Си**. Результаты соответствующих численных расчетов демонстрируются в среде **Matlab**.

**Литература**


1. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления // М.: Наука – 1972.
2. Бондаренко Н. В., Григорьева Э. В., Хайлов Е. Н. Множество достижимости трехмерной нелинейной системы, описывающей процесс очистки сточных вод // Проблемы Динамического Управления. Сборник научных трудов под ред. Осипова Ю. С., Кряжимского А. В. – 2010. Вып. 5. С. 28-41.


## О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ


Буданова А.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: annbudanova@gmail.com*


В работе рассматривается задача о построении скалярного функционального наблюдателя для систем с запаздыванием вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-ih)x(t-d) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-ih) \end{cases} \tag{1}$$

Где $x(t) \in \mathrm{R}^n$ вектор состояния, $u(t) \in \mathrm{R}^n$ известный вход, $y(t) \in \mathrm{R}^m$ известный выход, $h$ – постоянное запаздывание. Необходимо получить оценку функционала $\sigma(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i x(t-ih)$.

Для исследования системы был выбран метод полиномиальных преобразований [3, 4]. Результирующая система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(d)x(t) + B(d)u(t) \\ y(t) = C(d)x(t) \end{cases} \tag{2}$$

Где $d$ — оператор запаздывания, матрица $A(d) = A_0 + dA_1 + \ldots + d^k A_k$, $A(d) \in \mathrm{R}^{n\times n}[d], B(d) \in \mathrm{R}^{n\times m}[d], C(d) \in \mathrm{R}^{1\times n}[d]$ матрицы соответствующих размерностей над кольцом полиномов.

Было доказано, что для систем с запаздыванием (1) применим метод скалярных наблюдателей, предложенный в [2] для случая систем без запаздывания. Получены условия применимости метода. Результаты проиллюстрированы численными примерами.

**Литература**


1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц ---М.:Наука 1967
2. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью --- М.: Физматлит, 2007
3. Lee E.B., Neftci S., Olbrot A. Canonical Forms for Time Delay Systems ---IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-27, No. 1, February 1982
4. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems ---Kybernetika-Vol.37 (2001), Number 4


## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО КОРНЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ


Букжалёв Е.Е., Чернаков В.В.

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: bukzhalev@mail.ru*


В докладе рассматривается начальная задача для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 y' = F(y,x), \quad x \in (0, X), \\ y(0,\varepsilon) = y^0, \\ \varepsilon > 0 \text{ - малый параметр.} \end{gathered} \tag{1}$$

Считается, что вырожденное уравнение задачи (1):

$$F(y,x) = 0,$$

имеет решение $y = \phi(x)$, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$\phi'(x) < 0, \;\; F_y(\phi(x),x) \equiv 0, \;\; F_{yy}(\phi(x),x) < 0.$$

Иными словами, особенностью задачи (1) является наличие двукратного корня отвечающего ей вырожденного уравнения (вблизи которого и строится погранслойная асимптотика).

Асимптотическое разложение решения задачи (1) осуществляется на основе метода пограничных функций, в соответствии с которым $y(x,\varepsilon)$ представляется в виде:

$$y(x,\varepsilon) = \bar{y}(x,\varepsilon) + \Pi(\tau,\varepsilon),$$

где $\bar{y}(x,\varepsilon)$ - регулярная, а $\Pi(\tau,\varepsilon)$ - погранслойная части этого решения. При этом последняя зависит от растянутой переменной $\tau = x/\varepsilon^2$.

Регулярная и пограничная части раскладываются в ряды по малому параметру

$$\bar{y}(x,\varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon\,\bar{y}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n\,\bar{y}_n(x) + \ldots,$$
$$\Pi(\tau,\varepsilon) = \Pi_0(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\Pi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n\,\Pi_n(\tau,\varepsilon) + \ldots.$$

Подчеркнём, что члены последнего ряда являются функциями не только $\tau$ (как в случае однократного корня вырожденного уравнения), но и $\varepsilon$.

Подставляя эти ряды в уравнения задачи (1), раскладывая правую часть $F$ в ряд по малому параметру и приравнивая слагаемые с одинаковыми степенями $\varepsilon$, получаем ряд задач для определения членов асимптотики. Приведем задачу для $\Pi_0(\tau,\varepsilon)$:

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F(\bar{y}_0(0) + \Pi_0, 0) - \varepsilon\,\bar{y}_1(0)\,F_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0, 0),$$

$$\Pi_0(0,\varepsilon) = y^0 - \bar{y}_0(0).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00319).

**Литература**

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990.— 208 с.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА-ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА

Быков А.А.[1], Шарло А.С.[2]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]abkov@yandex.ru ,[2)]sharlo@phys.msu.ru*

В работе методом асимптотического разложения в ряд по степеням малого параметра построено разложение решения обобщенного уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова:

$$u_t + \varepsilon^2 V_0 u_x = \varepsilon^2 \mu_0 u_{xxt} + \varepsilon^2 k_0 u_{xx} - \gamma u\left(u^2 - U^2(x)\right). \tag{1}$$

Построено решение типа контрастной структуры, включающее 2 пограничных слоя на концах промежутка рассмотрения и внутренний переходный слой (ВПС). Плотность источников обращается в нуль при трех значениях: $u = \pm U$, $u = 0$, которые называются уровнями насыщения. В неоднородной среде ВПС перемещается. Для расчета скорости дрейфа в области ВПС произведен переход к переменной бегущей волны: $\xi = x - Wt,\ W = \varepsilon^2 W_0$ - скорость дрейфа. Уравнение (1) после перехода к новой переменной принимает вид:

$$\varepsilon^4 \mu_0 W_0 g_{\xi\xi\xi} + \varepsilon^2 (V_0 - W_0) g_\xi = \varepsilon^2 k_0 g_{\xi\xi} - \gamma g\left(g^2 - U^2\right). \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для линеаризованного в окрестности уровня насыщения уравнения (2) имеет два собственных значения порядка $\varepsilon^{-1}$ и одно - порядка $\varepsilon^{-2}$, поэтому асимптотический ряд слева от точки перехода $x^*$ включает одну функцию переходного слоя с растянутой переменной $\tau_1 = (x - x^*)/\varepsilon$, справа от точки перехода – две функции переходного слоя (быструю и медленную), растянутые переменные для которых $\tau_1 = (x - x^*)/\varepsilon$, $\tau_2 = (x - x^*)/\varepsilon^2$.

В работе построено нулевое и первое приближение для решения уравнения (2). Из условия сшивания производных функций слева и справа от точки перехода найдена связь между скоростью дрейфа и нулевым приближением для координаты точки перехода:

$$W_0 = \frac{V_0 - 3k_0 \dfrac{U_\xi}{U}}{\mu_0 \dfrac{2\gamma U^2}{5k_0} + 1}. \tag{3}$$

Формула (3) показывает, что а) скорость уравнения для уравнения КПП меньше, чем для уравнения адвекции-диффузии, б) при увеличении градиента функции $U$ увеличивается модуль скорости $W$, что подтверждается экспериментально.

**Литература**

1. Васильева А.Б. Контрастные структуры в сингулярно-возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. Т.4, № 3. С.799-851.
2. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G. On blow up of generalized of Kol-

mogorov-Petrovkii-Piskunov equation // Nonlinear Analysis. -2009. 1 May.
3. Быков А.А., Попов В.Ю. О времени жизни одномерных нестационарных контрастных структур // ЖВМиМФ – 1999. Т.309, №2. С.280-288

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД СО СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Василевский Ю.В.[1], Никитин К.Д.[1], Ольшанский М.А.[2], Терехов К.М.[1]

*[1)]Институт Вычислительной Математики РАН*
*[2)]Механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*

В докладе пойдет речь о численном методе моделирования течений со свободной границей вязкопластичных (модель Гершеля-Балкли) жидкостей. Численный подход основан на методе функции уровня для описания эволюции свободной поверхности и динамически адаптируемых сетках типа восьмидерево для дискретизации уравнений жидкости и свободной поверхности. Для аппроксимации определяющих соотношений используется метод регуляризации. Разностная схема является обобщением устойчивой дискретизации ньютоновских течений на разнесенных сетках на случай вязкопластичных сред и динамически сгущающихся / разгрубляющихся сеток. Численная апробация метода сначала производится на модельных задачах для ньютоновских сред со свободной поверхностью. В этом случае наблюдается сходимость вычисленных характеристик к данным, полученным из физического эксперимента. Далее метод применяется для расчета ряда вязкопластичных течений по наклонным плоскостям и задачи о свободно осциллирующей вязкопластичной капле. Последний тест является примером течения, где существенную роль играют силы поверхностного натяжения.

## ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ В СЕДЛОВЫХ ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Васильев Ф.П.[1], Антипин А.С.[2], Артемьева Л.А.[1]

*[1)]Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: artemieva.Luda@gmail.com*
*[2)]ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, e-mail: asantip@yandex.ru*

Рассматривается задача: найти точку $(w_*, p_*, y_*, r_*) \in W_0 \times E^{m_2} \times Y_0 \times E^{m_1}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$w_* \in Arg\min\left\{S_1(w) + \langle r_*, f_1(w)\rangle \middle| w \in W_0, g_1(w) + f_2(y_*) \le 0\right\}, \tag{1}$$

$$\left\langle p - p_*, g_1(w_*) + f_2(y_*)\right\rangle \le 0, \qquad \forall p \in E_+^{m_2}, \tag{2}$$

$$y_* \in Arg\min\left\{S_2(y) + \langle p_*, f_2(y)\rangle \middle| y \in Y_0, g_2(y) + f_1(w_*) \le 0\right\}, \tag{3}$$

$$\left\langle r - r_*, g_2(y_*) + f_1(w_*)\right\rangle \le 0, \qquad \forall r \in E_+^{m_1}, \tag{4}$$

$E^m$-евклидово пространство размерности *m*, $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{m} a^i b^i$ - скалярное произведение векторов $a = (a^1,..., a^m)$, $b = (b^1,..., b^m) \in E^m$, $E_+^m = \{a \in E^m : a \ge 0\}$- неотрицательный ортант в $E^m$. Функции $S_1(w)$, $f_1(w) = (f_1^1(w),..., f_1^{m_1}(w))$, $g_1(w) = (g_1^1(w),..., g_1^{m_2}(w))$ определены на множестве $W_0 \subseteq E^{m_3}$, функции $S_2(y)$, $f_2(y) = (f_2^1(y),..., f_2^{m_2}(y))$, $g_2(y) = (g_2^1(y),..., g_2^{m_1}(y))$ определены на множестве $Y_0 \subseteq E^{m_4}$, векторы $r \in E^{m_1}$, $p \in E^{m_2}$, $Arg\min\{f(z) \mid z \in Q\}$- множество точек минимума функции $f(z)$ на множестве *Q*.

Задача (1)-(4) является математической моделью седловой игры двух лиц и описывает поведение, например, заемщика и кредитора на кредитном рынке; взаимодействие двух производственных единиц, продукция каждой из которых может служить ресурсом для другой; возникает при согласованном поиске точек Парето в двух связанных между собой многокритериальных задачах, когда каждая из сторон в качестве весовых коэффициентов в свертках целевых функций берет множители Лагранжа другой стороны и.т.п. В более общем контексте, модель (1)-(4) позволяет связать в одной конструкции материальные и финансовые потоки в различных экономических ситуациях и изучать их взаимодействие с учетом противоречивых или совпадающих интересов сторон.

Для поиска точки равновесия предлагается экстрапроксимальный метод. Доказывается его сходимость.

**Литература**


1. Антипин А.С., Попова О.А. О равновесной модели кредитного рынка: постановка задачи и методы решения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2009, Т.49, №3, С. 465-481.
2. Антипин А.С. О моделях взаимодействия предприятий-производителей, предприятий-потребителей и транспортной системы. // Автоматика и телемеханика. 1989, №10, С. 105-113.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.


## ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОГРАНИЧНЫХ СРЕДСТВ ОБНАРУЖЕНИЯ.


Васин А.А.[1], Уразов А.С.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]vasin@cs.msu.su, [2)]anton@urazov.me*


В настоящей работе рассматривается модель взаимодействия пограничной службы (оперирующей стороны) и противника, осуществляющего регулярные нарушения государственной границы. Пересечение границы занимает у нарушителя фиксированное время $\overline{T}$. Для охраны участка границы используется некоторое средство обнаружения. Если во время перехода нарушителя оперирующая сторона использует средство обнаружения, то нарушитель будет задержан с заданной вероятностью $p(t)$, зависящей от конкретного момента времени $t$ применения средства обнаружения. В работе предполагается, что весь период планирования $T$ разбивается на временные интервалы $\widetilde{T}_i$, $i = 1,...,s$, внутри которых вероятность обнаружения нарушителя при использовании средства обнаружения постоянна: $p(t) = p_i$, $t \in \widetilde{T}_i$.

Технические особенности и количество доступных средств обнаружения накладывают ограничения на их использование: за время, соответствующее интервалу планирования, возможно провести наблюдение за участком границы не более $k$ раз. Таким образом, возникает задача выбора моментов времени применения средства обнаружения с целью обеспечения максимальной эффективности его использования. Предполагается, что противник не имеет возможности фиксировать факт наблюдения, но обладает информацией об имеющихся ресурсах оперирующей стороны.

Формально взаимодействие оперирующей стороны и нарушителей описывается в виде антагонистической игры, которая не имеет седловой точки в чистых стратегиях в практически интересных случаях. Поиск равновесия в смешанных стратегиях сводится к задаче поиска максимина, которая решается с использованием принципа уравнивания. В условиях дефицита ресурсов пограничной службы, найдены оптимальные стратегии оперирующей стороны и противника, а также соответствующее значение игры. Для практической реализации оптимальной стратегии приведен возможный алгоритм. В заключении описывается процесс постепенной модификации оптимальной стратегии при увеличении количества ресурсов оперирующей стороны.

**Литература**

1. Гермеер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.
2. Васин А. А., Морозов В. В., Краснощеков П. С. Исследование операций. — М.: Издательский центр «Академия», 2008.

## МЕХАНИЗМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОРРУПЦИИ

Васин А.А.[1], Николаев П.В.[2], Уразов А.С.[3]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]vasin@cs.msu.su, [2)]pv_nikolaev@mail.ru, [3)]anton@urazov.me*

Настоящая работа посвящена моделированию деятельности государственных инспекций и разработке методов подавления коррупции в них. Представим, что лидер некоторой страны желает организовать эффективную инспекцию, обеспечивающую законопослушное поведение граждан (агентов 0-го уровня) и подавляющую коррупцию. Для агентов 0-го уровня определены множество возможных действий $T_0$ и стратегия правильного поведения $t_0^*(I)$ в зависимости от случайного фактора $I$, $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$, (в случае налоговой инспекции уплата налога в зависимости от размера дохода). Агенты предполагаются рациональными и риск-нейтральными. Для предотвращения уклонения организуется инспекция, которая с вероятностью $p_1(t_0)$ проверяет агентов 0-го уровня. Инспектор всегда выясняет истинное значение $I$, но за взятку он может указать значение $t_1 < t_0^*$. Если $t_1 > t_0$, то агент наказывается штрафом $f_0(t_1 - t_0)$. Если проверка на $l$-ом уровне, проводимая с вероятностью $p_l(t_0,...,t_{l-1})$, выявляет нарушение, то все агенты нижестоящих уровней, связанные с данным делом, наказываются штрафами $f_i(t_l - t_{l-1})$. Стоимость проверки уровня $i$ составляет $c_i$. Проверка $k$-го уровня, проводимая доверенными лицами лидера, всегда раскрывает значение $t_k = t_0^*(I)$. Их время очень дорого, поэтому затраты на проведение одной проверки составляют $c_k$, $c_k >> c_i$. Стратегия $P$ организации инспекции включает количество уровней $k$ и вероятности проверок $p_1(t_0), p_2(t_0,t_1),..., p_k(t_0,t_1,...,t_{k-1})$. Инспекция минимизирует издержки на проведение проверок. Рассматривается 2 подхода к обеспечению честного поведения: коалиционный и некооперативный. Некооперативный подход связан с понятием совершенного подыгрового равновесия (СПР), соответствующего честному поведению всех агентов.

**Утверждение 1.** *Оптимальная стратегия в классе СПР с честным поведением и оптимальная стратегия, устойчивая к коалиционным отклонениям, совпадают и удовлетворяют условию* $p_1(t_0) = \hat{p}_1 = 1/f_0$, $p_s(t_0,...,t_{s-1}) = \hat{p}_s = \sum_{i=0}^{s-2} f_i \Big/ \sum_{i=0}^{s-1} f_i$ *для любых* $t_0,...,t_{s-1} < t_{\max}$, $s = 2,...,k$.

На модельных данных рассчитаны оптимальные стратегии инспекции. Показано, что оказывается возможным обеспечить честное поведение и подавить коррупцию с приемлемыми затратами. Для инспекций с 4 и более уровнями расходы на проверку составляют менее 4% от ожидаемого налогового сбора. При этом для проверки 100 000 налогоплательщиков при $k = 4$ достаточно 559 риск-нейтральных инспекторов и 17 честных проверяющих (для $k = 7$ – 868 и 11 соответственно).

Работа поддержана грантом РГНФ по проекту №11-32-00204а1

**Литература**

1. Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе // М.: Макс пресс - 2005.
2. Васин А.А., Картунова П.А., Уразов А.С. Модели организации государственных инспекций и борьбы коррупцией // Математическое моделирование. Т. 22. №4. С. 6789, 2010.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Вещинская В.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, v.veshchinskaya@gmail.com*

Распределённые системы часто используются в прикладном математическом моделировании, так как они отражают гетерогенность моделируемых агентов. Отсюда вытекает актуальность постановки задач оптимального управления такими системами. Данная работа посвящена исследованию задачи оптимального управления распределённой системой первого порядка.

Рассмотрим динамическую систему, которая задаётся уравнением переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + g\frac{\partial x(t,l)}{\partial l} = -\mu x(t,l) \ \ (t \in [0,T], \ l \in [0,L]). \tag{1}$$

$$x(0,l) = x_0(l) \ \ (l \in [0,L]), \tag{2}$$

Здесь $g$, $\mu$, $T$ и $L$ – заданные положительные параметры, $x(t,l)$ – скалярная фазовая переменная, $t$ – независимая временная переменная, $l$ – независимая одномерная пространственная переменная. $x_0(\cdot):[0,L]\mapsto R_1^+$ – заданная функция. Кроме того, задано краевое условие следующего вида

$$x(t,0) = p(t) + \int_0^L \beta x(t,l)dl \ \ (t \in [0,T]), \tag{3}$$

где $p(\cdot):[0,T]\mapsto R_1^+$ - заданная функция.

С помощью метода характеристик построено аналитическое решение системы (1-3).

Пусть функция $x_0(\cdot)$, задающая начальное условие (2), имеет следующий вид

$$x_0(t) = \begin{cases} \hat{x}_0(t), \ l \in [0,\hat{l}), \\ (1-\alpha)\hat{x}_0(t), \ l \in [\hat{l},L], \end{cases} \ \ (t \in [0,T]),$$

где $\hat{l} \in [0,L]$, $\alpha \in [0,1]$, $\hat{x}_0(\cdot)$ - стационарное решение системы (1)-(3).

Далее параметры $\hat{l} \in [0,L]$ и $\alpha \in [0,1]$, а также функция $p(\cdot)$ играют роль управлений. Определим функционалы $B(p(\cdot),\alpha,\hat{l}) = \alpha\int_{\hat{l}}^L \hat{x}_0(l)dl$ и $C(p(\cdot),\alpha,\hat{l}) = \int_0^L (x(T,l)-\hat{x}_0(l))^2 dl,$ и с их помощью определим функционал, являющийся взвешенной суммой $B(p(\cdot),\alpha,\hat{l})$ и $C(p(\cdot),\alpha,\hat{l})$ с заданным весом $\sigma \in [0,1]$

$$U(p(\cdot),\alpha,\hat{l}) = \sigma B(p(\cdot),\alpha,\hat{l}) + (1-\sigma)C(p(\cdot),\alpha,\hat{l}). \tag{4}$$

Рассматривается задача оптимального управления описанной системой (1)-(3) с функционалом (4). Подстановка полученного аналитического решения системы (1)-(3) в функционал (4) и введение специальной замены позволяет свести задачу к стандартной задаче оптимального управления и применить принцип максимума Понтрягина.

Работа имеет практическое приложение к моделированию динамики роста биомассы леса и решению задачи оптимального лесопользования.

**Литература**


1. Goetz R., Hritonenko N., Xabadia A., Yatsenko Yu. Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management // Applied Mathematics Letters. – 2008. – V. 21. P. 1090–1094.
2. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными // М.: БИНОМ – 2005. С.52–66.
3. Субботин А.И. Минимаксные уравнения и неравенства Гамильтона-Якоби // М.: Наука – 1991. С. 7–13.


## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ ХРОНИЧЕСКОГО МИЕЛОИДНОГО ЛЕЙКОЗА


Винников Е.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, evinnikov@gmail.com*


В работе исследуется задача оптимального управления, основанная на математической модели, описывающей процесс лечения хронического миелоидного лейкоза с использованием лекарств и химиотерапии.

Пусть $x_1(t)$ — количество незаражённых T−лимфоцитов, $x_2(t)$ — количество эффекторных T−лимфоцитов, $x_3(t)$ — количество раковых клеток. Рассматривается следующая нелинейная задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 - b_1 x_1(t) u_2(t) - c_1 x_1(t) \dfrac{x_3(t)}{x_3(t)+d}, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}, \\ \dot{x}_2(t) = (c_2 x_1(t) + c_3 x_2(t)) \dfrac{x_3(t)}{x_3(t)+d} - b_2 u_2(t) x_2(t) - c_4 x_2(t) x_3(t), \quad u_1(t) \in [u_{1min}, u_{1max}], \\ \dot{x}_3(t) = b_3(1-u_1(t)) x_3(t) \ln \dfrac{f}{x_3(t)} - b_4 u_2(t) x_3(t) - c_5 x_2(t) x_3(t), \quad u_2(t) \in [u_{2min}, u_{2max}], \\ J = \displaystyle\int_0^T (\alpha_3 x_3(t) - \alpha_1 x_1(t) + \beta_1 u_1^2(t) + \beta_2 u_2^2(t)) dt + \gamma_3 x_3(T) - \gamma_1 x_1(T) \to \min_{u_1, u_2}, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Здесь управление $u_1(t)$ характеризует интенсивность введения лекарственных препаратов, воздействующих только на раковые клетки, а $u_2(t)$ — интенсивность химиотерапии, воздействующей на все клетки, все коэффициенты постоянны, неотрицательны и индивидуальны для каждого пациента.

На заданном конечном горизонте времени T ставится задача минимизации функционала J. В зависимости от выбора неотрицательных весовых коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma$ получаются различные задачи оптимального управления. Исследование поставленной задачи проводилось с использованием принципа максимума Понтрягина [2]. Для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина в среде Matlab была разработана программа Leukemia. Как показывают численные эксперименты, оптимальное управление в данной задаче может иметь более одной точки переключения. Получены условия на коэффициенты, при которых выполняется теорема о достаточных условиях оптимальности [3].

**Литература**


1. Nanda S., Moore H., Lenhart S. Optimal control of treatment in a mathematical model of chronic myelogenous leukemia. // Mathematical Bioscinces. 2007. №210. P. 143−156.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
3. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. М., МАКС Пресс, 2003, с. 57-67.

## МОДЕЛЬНОЕ ДЕЗАГРЕГИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ НА ПРИМЕРЕ РОССИИ, УКРАИНЫ И ФИНЛЯНДИИ

Вржещ В.П.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: valentin.vrzheshch@gmail.com*

Рассматривается трехпродуктовое разложение макроэкономической статистики. За основу взят макроэкономический баланс по использованию, который разворачивается в балансы трех модельных продуктов: экспортного, импортного и внутреннего [1]. В отличие от производственных функций, в которых факторами производства выступают труд и капитал [3], мы рассматриваем факторами производства импортный и внутренний продукт исходя из предпосылки Армингтона [2]. Предлагается упрощенная модель общего равновесия, в которой потребление и валовое накопление представляются как CES-функции полезности от потоков импортного и внутреннего продуктов, а ВВП – как CES-функция замещения от объемов производства внутреннего и экспортного продуктов. Дефляторы потребления и накопления при этом выражаются как сопряженные к указанным функциям индексы цен. В конечном счете, удается получить дополнительно к балансам четыре неявные связи между десятью величинами: пятью составляющими основного макроэкономического баланса и пятью их дефляторами. Эти неявные связи в течение последних 11 лет с высокой точность выполняются на несглаженной (сохраняющей сезонные колебания) квартальной статистике Российской Федерации [1]. Также дезагрегирование успешно применено к макроэкономической статистике Украины (2002-2010 гг.) и Финляндии (1990-2010 гг.).

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 11-01-00644, РГНФ проект № 11-02-00241а, ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14, ПФИ Президиум РАН №14, проект 109.

**Литература**

1. Вржещ В.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А. Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики // Экономический журнал Высшей школы экономики, том 14, No.1, 2010, с. 88 - 104, Государственный университет Высшая школа экономики, Москва, ISSN 1813-8691
2. Lloyd P.J., Zhang X.-G. The Armington Model // Government of the Commonwealth of Australia – Productivity Commission: Productivity Commission Staff Working Paper. January 2006.
3. Weitzman, M.L., Soviet Postwar Economic Growth and Capital-Labor Substitution. The American Economic Review, Vol. 60, No. 4 (Sep., 1970), 676-692.

## ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ВЫВОДИМОГО ИЗ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО УРАН-ГРАФИТОВОГО РЕАКТОРА

Галинов А.С.[1], Капырин И.В.[2]

[1]*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: ale-galinov@yandex.ru*
[2)]*ИВМ РАН, e-mail: ivan.kapyrin@gmail.com*

Основной целью данной работы является построение численной модели фильтрации в геологической среде, окружающей радиационно-опасный объект. В качестве референтного объекта выбран выводимый из эксплуатации уран-графитовый реактор, захораниваемый на месте расположения. Построение фильтрационной модели является первым этапом в создании геомиграционной модели для прогноза долговременной безопасности объекта с точки зрения возможного переноса радионуклидов в окружающую среду.

Для решения поставленной задачи в заданной области формируется сетка, состоящая из ячеек смешанного типа (тетраэдры, пирамиды и гексаэдры). При этом в области, где требуется высокая точность аппроксимации границы (в окрестности объекта), используется неструктурированная тетраэдральная сетка [1]. Вне этой области для повышения эффективности вычислений используется гексаэдральная сетка. Переход от гексаэдров к тетраэдрам выполнен с помощью пирамид.

Дискретизация уравнения фильтрации производится при помощи метода конечных объёмов, О-схемы с многоточечной аппроксимацией потока [2,3].

Поскольку задача ставится в насыщенно-ненасыщенной среде, в ненасыщенной области используется упрощенная модель. Требуется решение нелинейной задачи, для чего применяется итерационный процесс, на каждом шаге которого изменяется тензор фильтрации и граничные условия [4].

Получено решение задачи: величины напора и потоков грунтовых вод в заданной расчетной области. Дальнейший путь развития модели предполагает усложнение геометрии области и создание геомиграционной модели.

**Литература**


1. Danilov A. Unstructured tetrahedral mesh generation technology // Ж. Выч.Мат. и Мат. Физ. 2010. Т. 50, № 1. С. 146–163.
2. Aavatsmark I., Barkve T., Boe O., Mannseth T., Discretization on unstructered grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods, SIAM J. SCI. COMPUT. Vol. 19, No. 5, pp. 1700–1716, September 1998.
3. Aavatsmark I., An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids, Computational Geosciences 6: 405–432, 2002.
4. Diersch H.-J.G. FEFLOW finite element subsurface flow and transport simulation system - User's Manual/ Reference Manual/ White Paper. Release 5.0. WASY Ltd, Berlin.2004.


## ПРОМЕЖУТОЧНАЯ МАГИСТРАЛЬ В ОБОСНОВАНИИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА


Гималтдинов И.Ф.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: ilgiz.gimaltdinov@gmail.com*


В моделях экономического роста важное место занимают промежуточные магистрали. Промежуточной магистралью называется траектория, к которой стремятся решения задач с конечным горизонтом планирования. В некоторых случаях ([1,2]) промежуточная магистраль является решением задачи экономического роста с бесконечным горизонтом.

В данной работе рассматривается модель рамсеевского типа, учитывающая ограничение ликвидности и спрос на потребительские кредиты:

$$\begin{aligned} &\int_0^T M^{\alpha} e^{-\Delta t} dt \to \max, \\ &\dot{x} = S + (r-\gamma)x - (r + 1/\theta)M, \\ &M(t) \ge x(t),\ x(0) = X_0, x(T) \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x$ - благосостояние домашних хозяйств (разница между наличными деньгами $M$ и кредитами). Подробное описание модели и основные предположения вводятся в [3]. Формулировка задачи (1) с бесконечным горизонтом планирования вызывает трудности в связи с наличием у задачи с конечным горизонтом условия на правом конце $x(T) \geq 0$. Для корректной постановки задачи требуется ввести определение ликвидного состояния.

**Опр 1.** *Ликвидным состоянием задачи (1) будем называть такие* $x$, *для которых существует допустимая траектория, попадающая в целевое множество* $\mathrm{X} = [0, +\infty)$ *за конечный промежуток времени.*

Множеством ликвидных состояний $L$ задачи (1) является $L = [-S/(r-\gamma), +\infty)$. В данной работе показывается, что решение конечных задач (1) имеет промежуточную магистраль, которая в свою очередь является решением задачи

$$\begin{aligned} &\int_0^T M^{\alpha} e^{-\Delta t} dt \to \max, \\ &\dot{x} = S + (r-\gamma)x - (r + 1/\theta)M, \\ &M(t) \geq x(t), x(0) = X_0, x(t) \in L. \end{aligned} \qquad (2)$$

Как видно из сопоставления (1) и (2), при переходе к задаче с бесконечным горизонтом условие на правом конце $x(T) \geq 0$ меняется на фазовое ограничение $x \geq -S/(r-\gamma)$. Задача (2) является корректной постановкой задачи с бесконечным горизонтом для модели (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-07-00162), программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (мероприятие 1.2.1 НК-15П).

**Литература**

1. Samuelson P.A. A catenary turnpike theorem involving consumption and golden rule //American economic review, 55 (1965).
2. Cass D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation, a turnpike theorem// Econometrica, 34 (1966).
3. Гималтдинов И.Ф. Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 2010.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Гончаров О.И.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: goncharovoi@yandex.ru*

Рассматривается возможность использования метода трансверсальных функция, изложенного в работах [1], для стабилизации билинейной системы

$$\dot{x} = B_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i x, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, $B_i \in R^{n \times n}$ – постоянные матрицы.

Введение трансверсальной функции $F(a): T^{l-m} \to R^{n \times n}$, определенной на торе $T^{l-m}$ размерности $l-m$, позволяет свести задачу стабилизации (1) к задаче стабилизации в нуле системы

$$\dot{z} = F^{-1}(a)\left(B_0 + \sum_{i=1}^{l} u_i B_i\right)F(a)z, \qquad (2)$$

где матрицы $B_1, .., B_l$ – базис матричной алгебры Ли $g_B$, порожденной матрицами $B_1, .., B_m$ и имеющей размерность $l$. Вектор управлений расширяется на $l-m$ компонент, соответствующим параметру $a$, точнее

$$\dot{a} = q(u_{m+1},..,u_l). \quad (3)$$

При наложении некоторых дополнительных ограничений на матрицы $B_0, B_1,..,B_m$ можно выделить два класса систем:

1. Класс систем стабилизируемым периодическим управлением. Его можно рассматривать, как некое обобщение класса систем, стабилизируемых постоянным управлением.
2. Класс систем в некотором смысле сходных с хорошо известными JQ билинейными системами (введены в [2]), для которых существует набор чисел $v_1,..,v_m$ такой, что матрица $B_0 + \sum v_1 B_i$ нейтральна.

Для вычисления значений трансверсальной функции $F(a)$вместо оригинального метода предложенного в [1] предлагается использовать подход, учитывающий специфику билинейных систем и позволяющий упростить вычисления значений функции $F(a)$и ее производных за счет расширения фазового вектора.

**Литература**


1. Morin P., Claude S. Practical Stabilization of Driftless Systems on Lie Groups: The Transverse Function Approach // IEEE tr. on AC. – 2003. – V. 48, NO. 9, pp. 1496-1508.
2. Jurdjevic V., Quinn J. Controllability and stability // J. Differ. Equ. – 1978. – V.28, pp. 381–389.
3. Elliott D. L. Bilinear Control Systems. Matrices in Action / Ed. By S. Antman, J. Marsden, L. Sirovich. — Springer, 2009.


## ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ РАЗРАБОТКИ ОТКРЫТЫХ КАРЬЕРОВ


Григоренко Н.Л.[1], Камзолкин Д.В.[2], Лукьянова Л.Н.[3], Пивоварчук Д.Г.[4]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова,*
*e-mail: [1)]grigor@cs.msu.su, [2)]kamzolkin@cs.msu.su, [3)]lln@cs.msu.su, [4)]pivovarchuk@cs.msu.su*


В докладе приводится описание постановок и решений четырех классов задач возникающих при построении математических моделей процесса разработки открытого карьера с целью добычи полезных ископаемых. Первая задача – задача определения функции концентрации минералов, присутствующих в месторождении по результатам бурения и разработка блоковой модели месторождения. Вторая задача – задача разбиения блоковой модели на фазы разработки. Третья задача – задача оптимизации послойной разработки фазы месторождения при наличии прогноза цен, изменяющихся во времени, на имеющиеся в месторождении минералы. В качестве функционала качества рассматривается дисконтированная прибыль от продажи чистого минерала по биржевым ценам за вычетом дисконтированных цен на добывающее и перерабатывающее оборудование. Решения задач оптимального управления строятся на основе принципа максимума Понтрягина [1]. Четвертая задача – задача управления процессом послойной разработки фазы месторождения по текущей информации о биржевых ценах на имеющиеся в месторождении минералы. Решения игровых задач управления строятся основе метода динамической регуляризации Осипова [2]. При различных гипотезах на свойства функций концентрации от глубины залегания минералов, проводятся результаты решения ряда задач оптимального управления и задач управления в условиях неопределенности включающие значения терминального функционала качества, величины периода разработки слоя фазы, управления, как функции параметров месторождения и биржевых цен на минералы [3],[4].


Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00378), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5443.2008.1) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

**Литература**


1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 391 с.
2. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 654 с.
3. Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н., Пивоварчук Д.Г. Об одной задаче оптимального управления с нелинейным функционалом. Труды института математики и механики УрО РАН, Том.16, № 5, 2010, с. 22-29.
4. Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н., Пивоварчук Д.Г. О задаче оптимального управления с интегральным функционалом от рациональной функции управления. Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1586–1600.


## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ


Гулин А.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vmgul@cs.msu.su*


На равномерной сетке с шагами $h$ и $\tau$ рассматривается семейство разностных схем

$$\begin{gathered} y^n_{t,i} - y^{(\sigma)}_{\bar{x}x,i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1, \quad hN = 1, \quad n = 0,1,\dots, \\ y^0_i = u_0(x_i), \quad y^{n+1}_0 = 0, \quad \frac{h}{2} y^n_{t,N} + y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \gamma y^{(\sigma)}_{x,0} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

с нелокальными граничными условиями и вещественным параметром $\gamma$. В некотором интервале $\gamma \in (1, \gamma_+)$ спектр основного разностного оператора содержит единственное собственное значение $\lambda_0$ в левой комплексной полуплоскости, тогда как остальные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ расположены в правой полуплоскости. Соответствующее сеточное пространство $H_N$ представляется в виде прямой суммы $H_N = H_0 \oplus H_{N-1}$ одномерного подпространства и подпространства $H_{N-1}$, которое представляет собой линейную оболочку собственных векторов $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(N-1)}$. Предполагая, что

$$1 < \gamma < \gamma_+ = \operatorname{ch}\left( h^{-1} \ln\left( \frac{1 + \sin(\pi h)}{\cos(\pi h)} \right) \right),$$

обозначим $a = a(\gamma) = \operatorname{ch}\left(h \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)\right)$, $a_* = 0.5\left(1 + \sqrt{1 + 8\sin^2(\pi h)}\right)$. Справедливы неравенства $1 < a < a_+ = \cos^{-1}(2\pi h)$, $1 < a_* < a_+$.

Концепция асимптотической устойчивости разностных схем введена А.А. Самарским [1, с. 201] в связи с разностными схемами для уравнения теплопроводности с краевыми условиями первого рода. Наличие неустойчивой гармоники вынуждает несколько изменить определение асимптотической устойчивости. Пусть $s_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$ — собственные значения оператора перехода разностной схемы (1). Назовем разностную схему (1) *асимптотически устойчивой в подпространстве* $H_{N-1}$, если для всех собственных значений оператора перехода, кроме $s_0$, выполнены неравенства $|s_k| < |s_1| < 1$, $k = 2,3,\dots,N-1$. Далее обозначено $\kappa = \tau / h^2$.

**Теорема 1.** *Явная схема* ($\sigma = 0$) *асимптотически устойчива в* $H_{N-1}$ *при условии*

$$\kappa < \frac{a}{2(a + \sin^2(\pi h))}, \text{ если } 1 < a < a_*, \text{ и при условии}$$

$$\kappa < \frac{1 - a\cos(2\pi h)}{2(a - \cos(2\pi h))^2},\ \textit{если}\ \ a_* < a < a_+.$$

**Теорема 2.** *Если* $1 < a < a_+$, *то чисто неявная схема* ($\sigma = 1$) *асимптотически устойчива в* $H_{N-1}$ *при любых* $\kappa > 0$.

**Теорема 3.** *Если* $1 < a < a_*$, *то симметричная схема* ($\sigma = 0.5$) *асимптотически устойчива в* $H_{N-1}$ *при условии*

$$\kappa^2 < \frac{a}{(a+1)(-a^2 + a + 2\sin^2(\pi h))}.$$

Поддержано РФФИ (грант 10-01-00728) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» за 2009 – 2013 г.

**Литература**

1. А.А. Самарский, А. В. Гулин. Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973.

## О РАВНОМЕРНОЙ ПО ПАРАМЕТРУ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ВЕСАМИ.

Гулин А.В.[1], Мокин А.Ю.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]vmgul@cs.msu.ru, [2)]MknAndrew@mail.ru*

Рассматривается семейство разностных схем с весами

$$\left(E + \tau\sigma A\right)\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = 0,\ n = 0,1,2,\dots,\quad y^0 = \varphi(x), \tag{1}$$

в котором оператор $A$ определён равенствами

$$\left(Ay\right)_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i = 1,2,\dots,N-1,\quad \left(Ay\right)_N = -2h^{-1}\left(\gamma y_{x,0} - y_{\bar{x},N}\right), \tag{2}$$

где $\gamma$ - вещественный параметр. Разностная схема (1),(2) аппроксимирует нелокальную задачу теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1,\quad u(0,t) = 0,\ \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t),\ t > 0,$$

которая является обобщением задачи Самарского-Ионкина [1]. В работе [2] доказана корректность схемы (1),(2) при $\gamma = 1$, в частности, найдена сеточная энергетическая норма, гарантирующая устойчивость схемы по начальным данным в смысле неравенства

$$\left\|y^{n+1}\right\| \le \left\|y^n\right\|,\ n = 0,1,2,\dots \tag{3}$$

при выполнении условия

$$\sigma \ge 0.5 - h^2/4\tau. \tag{4}$$

В работе [3] аналогичный результат был получен для любого $0 < \gamma < 1$. Однако норма $\|\cdot\|_D$, построенная авторами работы [3], обладала константами эквивалентности $0 < \chi_1 < \chi_2$, $\chi_j = \chi_j(\gamma)$ с сеточной среднеквадратической нормой $\|\cdot\|_2$, отношение которых $\chi_2(\gamma)/\chi_1(\gamma)$ обращалось в бесконечность при $\gamma \to 1$, в то время как $\chi_2(1)/\chi_1(1) < \infty$.

В настоящей работе определена энергетическая норма $\|\cdot\|_\gamma$, в которой схема (1),(2) устойчива в смысле неравенства (3), если её параметры удовлетворяют условию (4). В отличие от результатов работы [3] отношение констант эквивалентности данной нормы с сеточной среднеквадратической нормой ограничено на отрезке $\gamma \in [0,1]$. Как следствие, доказана устойчивость схемы (1),(2) в смысле неравенства $\|y^n\|_2 \le C\|y^0\|_2$, $n = 1,2,\dots$ с константой $C > 0$, не зависящей от выбора параметра $\gamma \in [0,1]$.

**Литература**


1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения – 1977. Т.13. №2. С. 294-304.
2. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Разностные схемы для нелокальных задач // Известия Вузов. Математика. – 2005. №1 (512). С. 40-51.
3. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Критерий устойчивости разностной схемы для нелокальной задачи теплопроводности // Известия Вузов. Математика. – 2007. №6 (541). С. 21-28.


## КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ


Давыдова М.А., Нефедов Н.Н.

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*


Рассматривается краевая задача для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon(\mathbf{A}(u,x), \nabla u) - B(u,x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \\ &u(x,\varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \end{aligned} \tag{1}$$

где компоненты вектора $\mathbf{A}(u,x) = \{A_1(u,x), \quad A_2(u,x)\}$, функции $B(u,x)$ и $g(x)$ являются достаточно гладкие в области изменения $u \in \overline{U}$ и $x \in \overline{D}$.

С использованием методов работы [1] для задачи (1) построено асимптотическое разложение по параметру $\varepsilon$ решения типа контрастной структуры. Кривая $C$, в малой окрестности которой происходит переход решения от одного корня вырожденного уравнения к другому, заранее не известна. Уравнение этой кривой в виде разложения по параметру $\varepsilon$ находится в процессе построения асимптотики решения. Коэффициенты разложения определяются как решения конечных (недифференциальных) уравнений. Предлагаемый алгоритм построения приближенного решения позволяет эффективно исследовать так называемый критический случай, с последующим обобщением результатов на случай многомерной задачи при $D \subset R^N$.

Существование решения с построенной асимптотикой обусловлено свойствами нелинейной функции $B(u,x)$ и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств [1].

Если рассмотреть решение задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [2]).

Определенное значение для приложений имеет частный случай, когда $\mathbf{A}(u,x) = \mathbf{A}(x)$. Соответствующая краевая задача приводится в качестве примера.


Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №10-01-00319.


**Литература**


1. *Н.Н. Нефедов.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями.// Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149.

2. *В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. //Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т.4. №3. С. 799-851.

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЫ ВОЛНОВОДОВ И ИХ СВОЙСТВА

Делицын А.Л..[1], Круглов С.И.[2] , Трошина И.К.[1]

*Физический ф-т, МГУ имени М.В. Ломоносова, [1)]delitsyn@mail.ru, [2)]itroshina@mail.ru*
*[2)]МИРЭА, каф. прикладной математики, Москва, kruglov@mail.ru*

Рассматриваются краевые задачи, возникающие при изучении системы стационарной системы уравнений Максвелла

$$rotE = ik\mu(x,y)H,\ \ rotH = -ik\varepsilon(x,y)E$$

$$div\varepsilon(x,y)E = 0, \quad div\mu(x,y)H = 0$$

в цилиндре с граничными условиями, отвечающими идеально-проводящей стенке. Исследуются решения вида $E = E(x,y)e^{i\gamma z}, H = H(x,y)e^{i\gamma z}$. Рассмотрение решений подобного вида приводит к спектральной задаче в сечении цилиндра, при этом $\gamma$ выступает в качестве собственного значения, а $E, H$ в роли собственных векторов.

Для исследования подобной задачи существуют различные методы ее сведения к краевой задаче второго порядка. Мы рассматриваем четыре постановки задачи. При этом, не смотря на отсутствие поглощения в среде, задача является несамосопряженной. Для волноводов с анизотропным постоянным заполнением и волноводов с изотропным, но неоднородным заполнением мы демонстрируем появление комплексных мод. Рассмотрено поведение дисперсионных кривых и их переход из вещественной в комплексную область.

Исследована задача о полноте корневых векторов всех четырех рассматриваемых задач. Для одной из постановок задача сводится к рассмотрению операторного пучка Келдыша. Для других задач полнота системы корневых векторов следует из полноты системы векторов этой задачи.

**Литература**

1. Делицын А.Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71. № 3. С. 61-112.
2. Делицын А.Л., Степанов И.В. Построение конечно-элементных схем высокой точности для цилиндрических волноводов // Вестн. МГУ, сер. физ., астрон. 2005. № 5. С. 10-12.
3. Делицын А.Л., Трошина И.К. Комплексные волны в волноводе с анизотропным заполнением // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 5. С. 213-217.
4. Делицын А.Л. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода // Дифференциальные уравнения 2000. Т.36. N 5. С. 629-633.

## ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕЙ СОБОЙ ВНЕШНИЙ ОБЪЕМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Денисов А.М.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: den@cs.msu.ru*

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения диффузии в случае сферической симметрии в области, являющейся сферическим слоем,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - u, \quad a < r < b, \quad 0 < t \le T,$$

$$\alpha u(a,t) - \beta\frac{\partial u}{\partial r}(a,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\alpha u(b,t) + \beta\frac{\partial u}{\partial r}(b,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(r,0) = \gamma(r), \quad a \le r \le b,$$

где $\alpha$ и $\beta$ - неотрицательные постоянные, $\alpha + \beta > 0$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные $\alpha$ и $\beta$ заданы, а функция $\gamma(r)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(r)$ и $u(r,t)$, если задана дополнительная информация о решении начально-краевой задачи

$$g(t) = \frac{4\pi}{R_0}\int_a^b \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr, \quad R_0 > b, \quad t \in [t_1, t_2] \subseteq [0,T].$$

Функция $g(t)$ представляет собой меняющийся во времени объемный потенциал в фиксированной точке пространства. Плотность этого потенциала является оператором Лапласа, вычисленным от решения начально-краевой задачи.

Сформулированную обратную задачу можно рассматривать как линеаризованную постановку обратной задачи, возникающей при исследовании математических моделей возбуждения сердца.

Доклад посвящен исследованию единственности решения обратной задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 11-01-00259.

## О ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Дмитриев В.И.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail:dmitriev@cs.msu.su*

При математическом моделировании электромагнитных полей в неоднородных средах активно используется метод интегральных уравнений. При редукции краевых задач электродинамики к интегральным уравнениям необходимо вычислять вторые производные от объемного потенциала, что приводит к появлению сингулярных интегралов. Обычно имеющаяся особенность в интеграле выделяется по шару малого радиуса с центром в точке особенности. Однако такое выделение с вычислительной точки зрения неудобно, т.к. область интегрирования при численном решении интегрального уравнения разбивается на подобласти в виде параллелепипедов. Ясно, что в этом случае необходимо вносить поправку в определение главного значения интеграла.

Показано, что при выделении особенности второй производной объемного потенциала по параллелепипеду со сторонами $h_x, h_y, h_z$ интеграл определяется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_V \frac{\rho(M_0)}{R_{MM_0}}dv_{M_0} = v.p.\int_V \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0} + I_x^0,$$

где

$$I_x^0 = -8arctg\frac{\alpha_y\alpha_z}{\alpha_x}; \alpha_k = \frac{h_k}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}}; \ k \in (x, y, z).$$

Аналогично,

$$I_y^0 = -8arctg\frac{\alpha_x\alpha_z}{\alpha_y};\ I_z^0 = -8arctg\frac{\alpha_x\alpha_y}{\alpha_z}.$$

При этом имеет место равенство $I_x^0 + I_y^0 + I_z^0 = -4\pi.$

## ТРЁХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ ПОЛЕМ МОЩНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Дмитриев В.И.[1], Барашков И.С.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]dmitriev@cs.msu.su, [2)]baraskov@cs.msu.su*

Геофизические методы электромагнитного зондирования верхних слоев Земли направлены на изучение строения земных недр и на поиск месторождений полезных ископаемых. При морских исследованиях в качестве источника электромагнитного поля используется мощный горизонтальный электрический диполь, расположенный на поверхности или под поверхностью моря на заданной глубине, а измерения электромагнитного поля проводятся датчиками, расставленными на морском дне.

В качестве модели строения среды, в которой проводится электромагнитное зондирование, рассматривается трёхслойная Земля, в которой первый слой – море, второй слой – мягкие наносы и третий слой – твёрдые наносы.

В слое твёрдых наносов с проводимостью $\sigma_3$ в области $V$ расположено трёхмерное неоднородное тело с проводимостью $\sigma_T(x, y, z)$.

Для решения задачи электромагнитного зондирования неоднородной среды применяется метод интегральных токов. Используя тензорную функцию Грина, можно поля во всём пространстве записать в виде

$$\vec{E}(M') = \vec{E}^N(M') + \int_V \hat{G}_E(M', M)\,\vec{j}(M)dv_M\ , \tag{1}$$

$$\vec{H}(M') = \vec{H}^N(M') + \int_V \hat{G}_H(M', M)\,\vec{j}(M)dv_M\ , \tag{2}$$

где $\vec{E}^N$ и $\vec{H}^N$ – нормальное электрическое и магнитное поле, возбуждаемое в горизонтально однородной слоистой среде горизонтальным электрическим диполем, $\vec{j}(M) = \sigma_a(M)\vec{E}(M)$ – избыточный ток в неоднородности, $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_3$.

Выражение (1) даёт интегральное уравнение для плотности избыточного тока $\vec{j}(M) = \sigma_a(M)\vec{E}(M)$:

$$\vec{j}(M') - \sigma_a(M')\int_V \hat{G}_E(M', M)\,\vec{j}(M)dv_M = \sigma_a(M')\vec{E}^N(M'),\quad M' \in V\ . \tag{3}$$

Определив из (3) $\vec{j}(M)$, вычислим с помощью (1)-(2) электрическое и магнитное поле на дне моря, где расставлены измерительные датчики.

### Литература

1. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование электромагнитного поля удалённых источников в неоднородной среде // Прикладная математика и информатика. – 2009. № 32, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, с. 20-31.
2. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование морских зондирований полем мощного удалённого источника при наличии сложной береговой линии // Прикладная математика и информатика. – 2010. № 34, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, с. 41-60.

## АНАЛИЗ ПЛАЗМОННЫХ РЕЗОНАНСОВ ЛОКАЛЬНЫХ СТРУКТУР МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Еремин Ю.А.[1], Гришина Н.В.[2]

*1)Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: eremin@cs.msu.ru*
*2)Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: ngrishina@inbox.ru*

Непрерывное совершенствование в реализации и использовании металлодиэлектрических наноструктур и возможность определения их оптических свойств выдвинуло плазмонику на передний край современной нанооптики и нанотехнологии. Среди многочисленных применений плазмоники в различных отраслях науки и технологии исследование рассеивающих свойств наночастиц из благородных металлов имеет огромный потенциал для практических применений [1-2]. Наночастицы, сделанные из серебра и золота, демонстрируют уникальные оптические свойства благодаря поверхностному плазмонному резонансу (ПР), который дает возможность их использования в качестве средства для изучения биологических молекулярных структур и в сверхразрешающих оптических микроскопах. Кроме того, чрезвычайно высокая интенсивность электрического поля, возникающая в результате плазмонного резонанса в частотной области, приводит к сильному возрастанию сигнала от молекулы, расположенной вблизи наночастиц. Подобное (на несколько порядков) усиление сигнала дает возможность обнаруживать отдельные молекулы [2].

Современное состояние технологий создания наноразмерных структур требует наличия адекватных средств математического моделирования для предсказания их рассеивающих свойств. В настоящее время существует множество методов, в том числе и строгих, для определения плазмонных резонансов локальных структур. Такие распространенные приближенные методы, как метод Конечных разностей во временной области или метод Конечных элементов сталкиваются с определенными трудностями, связанными с необходимостью адекватной оценки погрешности результатов. Строгие методы, основанные на поверхностных или объемных интегральных уравнениях, не позволяют моделировать сверхсильное взаимодействие частиц, расположенных на расстояниях порядка 1нм.

В данной работе Метод Дискретных Источников (МДИ) [3] был адаптирован для анализа ПР структуры, состоящей из 2х серебряных сфероидов, расположенных на расстояниях порядка 1нм друг от друга. Выполненная модификация МДИ существенно отличается от схемы, использованной ранее для анализа линейных кластеров [4]. Проведен анализ интенсивности поля в точке между сфероидами. Установлено наличие ПР в частотной области, как для интенсивности поля, так и для сечения рассеяния поляризованного светового излучения. Показано, что усиление интенсивности электрического поля может составлять $10^6$ в пике плазмонного резонанса. Исследована зависимость ПР от поляризации возбуждающего света, вытянутости сфероидов и расстояния между ними.

**Литература**

1. D. Sarid, W. Challener. Modern Introduction to Surface Plasmons. Theory, Mathematica Modeling, and Applications. Cambridge Univ. Press, 2010.
2. Климов В.В. Наноплазмоника. Физмалит, 2009.
3. Eremin Yu.A. The Method of Discrete Sources in Electromagnetic Scattering by Axially Symmetric Structures//J. Commun. Techn. Electron. 2000, 45 (Suppl.2): S269-S280.
4. Eremin Yu.A., Orlov N.V., and Rozenberg V.I. Multiple Electromagnetic Scattering by a Linear Array of Electrified Raindrops//J.Atmosph. Terr. Phys.1995, 57 (3): 311-319.

# ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ

Ершов Н.М.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: ershovnm@gmail.com*

Рассматривается задача дискретного низкоуровневого моделирования естественных (химических и биологических) систем [1]. Классические средства в этой области – это клеточные автоматы [2], системы Линденмайера (или L-системы) [3] и мембранные системы [4]. Однако, особенности клеточных автоматов и L-систем не позволяют естественным образом моделировать, например, химические процессы, т.к. в них отсутствует механизм согласованного изменения состояний отдельных элементов, а основным предназначением мембранных систем является все же не моделирование, а анализ вычислительных возможностей микробиологических систем.

В настоящей работе вводится в рассмотрение новая модель, которую будем называть Марковской системой. В основе этой модели лежит набор подстановок вида $\alpha \to_{[p]} \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ цепочки символов в заданном алфавите, $p$ – вероятность применения подстановки. Набор может включать в себя несколько подстановок с одинаковой левой частью, но их суммарная вероятность не должна превышать единицы. Процесс применения подстановок состоит в последовательном выполнении следующего алгоритма: 1) текущая цепочка случайным образом разделяется на подцепочки; 2) каждая полученная подцепочка заменяется на новую согласно заданному набору подстановок с учетом их вероятностей; 3) все подцепочки, полученные в результате второго шага, соединяются и образуют новую текущую цепочку.

В работе показывается, что Марковские системы обладают широким спектром типов поведения. Если набор подстановок содержит в себе перемешивающие подстановки вида $ab \to_{[\theta]} ba$, и вероятности применения всех остальных подстановок много меньше $\theta$, то состояние системы в каждый момент времени описывается системой дифференциальных уравнений, аналогичных кинетическим уравнениям, используемых при описании динамики химических реакций. С другой стороны, несложно доказывается, что Марковские системы являются алгоритмически универсальными системами, т.е. способны реализовывать сколь угодно сложные алгоритмы и демонстрировать упорядоченное поведение. Использование специальных символов-разделителей позволяет совместить в рамках одной системы сразу несколько типов поведения. Это открывает возможность к моделированию простейших биологических систем – клеток, окруженных мембраной и помещенных в среду. Таким образом, Марковские системы могут с успехом применятся для низкоуровневого имитационного моделировании разнообразных физических, химических и биологических процессов. Их преимуществом является простота реализации и компактность описания моделируемых процессов и систем.

**Литература**

1. Dittrich P., Ziegler J., Banzhaf W. Artificial chemistries – a review // Artificial Life. – 2001, №7, p. 225-275.
2. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов // М.: Мир – 1991.
3. Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. The algorithmic beauty of plants // Springer-Verlag New York – 1996.
4. Paun G., Rozenberg G., Salomaa A. The Oxford handbook of membrane computing // Oxford University Press – 2010.

## НОВОЕ РАВНОВЕСИЕ В МНОГОШАГОВОЙ КОНФЛИКТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Жуковский В.И.

*Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: zhkvlad@yandex.ru*

Используемые ранее гарантированные решения основывались на подходящем аналоге седловой точки: использовалась пара ситуация-неопределенность такая, что при этой неопределенности ситуация реализует равновесие по Нэшу, а при используемой ситуации неопределенность осуществляет минимум по Парето.

Новое гарантированное решение базируется на аналоге максимина, где внутренний минимум есть минимум по Парето, а внешний максимум – равновесие по Нэшу.

С помощью модификации метода динамического программирования предлагается способ построения введенного гарантированного решения в линейно-квадратичной бескоалиционной позиционной многошаговой игре.

## ВОЛЬТЕРРОВЫ ПО А.Н. ТИХОНОВУ НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Жуковский Е.С.

*Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, e-mail: zukovskys@mail.ru*

Работа посвящена исследованию операторных уравнений Вольтерра методами теории накрывающих отображений [1,2].

Пусть $(X,\rho_X)$, $(Y,\rho_Y)$ – метрические пространства, $B_X(u,r)$ – замкнутый шар пространства $X$ с центром в $u$ радиуса $r>0$. Пусть заданы $\alpha>0$, $W\subseteq Y$, $\mathbf{A}\subseteq X\times \mathrm{R}_+$.

**Определение 1.** Отображение $F:X\to Y$ назовем $\alpha$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathbf{A}$, если для любых $(u,r)\in\mathbf{A}$ имеет место включение

$$B_Y(F(U),\alpha r)\bigcap W\subseteq F(B_X(u,r)\,.$$

Всюду далее элементами пространств $X,Y$ являются отображения $x:[a,b]\to E_1$, $y:[a,b]\to E_2$, где $E_1,E_2$ – заданные множества. Пусть $\gamma\in(a,b)$. Для функции $x\in X$ обозначим $x^\gamma$ – ее сужение на $[a,\gamma]$. Определим отображение $\Pi_X^\gamma: x\mapsto x^\gamma$. Для произвольного множества $U\subseteq X$ положим $U^\gamma=\Pi_X^\gamma U$. Аналогичные обозначения используем и для пространства $Y$. Будем предполагать, что равенство

$$\rho_{X^\gamma}(x^\gamma,u^\gamma)=\inf\{\rho_X(x,u):\Pi_X^\gamma x=x^\gamma,\ \Pi_X^\gamma u=u^\gamma\}$$

определяет метрику пространства $X^\gamma$, и аналогично задается метрика пространства $Y^\gamma$.

**Определение 2.** Отображение $F:X\to Y$ называют вольтерровым по А.Н. Тихонову, если для любых $\gamma\in(a,b)$ и $x,u\in X$, удовлетворяющих равенству $\Pi_X^\gamma x=\Pi_X^\gamma u$, имеет место $\Pi_X^\gamma Fx=\Pi_X^\gamma Fu$.

Пусть заданы вольтеррово по каждому аргументу отображение $L_0 1\neq 0$ и элемент $y\in Y$. Рассмотрим уравнение

$$\Psi(x,x)=y\,. \tag{1}$$

Пусть также известны $u_0\in X$, $\alpha>\beta\geq 0$, $R>0$, $\delta\in(0,b-a]$. Определим $w_0=\Psi(u_0,u_0)$, $U=B_X(u_0,R)$. Положим $\gamma=a+\delta$ и определим отображение $\Psi^\gamma: X^\gamma\times X^\gamma\to Y^\gamma$ равенством $\Psi^\gamma(x_1^\gamma,x_2^\gamma)=\Pi_Y^\gamma\Psi(x_1,x_2)$, где $x_1,x_2$ – произвольные продолжения функций $x_1^\gamma, x_2^\gamma$. Для каждого $x_2 \in U$ определим

$$W^\gamma(x_2^\gamma) = B_{Y^\gamma}(\Psi^\gamma(u_0^\gamma, x_2^\gamma), \alpha R),\ \mathbf{A}^\gamma(x_2^\gamma) = \{(x_2^\gamma, r) : 0 \le r \le R - \rho_{X^\gamma}(x_2^\gamma, u_0^\gamma)\}.$$

**Теорема.** Пусть пространство $X^\gamma$ полное и выполнены следующие предположения: для любых $x_1, x_2 \in U$ отображение $\Psi^\gamma(\cdot, x_2^\gamma) : X^\gamma \to Y^\gamma$ является $\alpha$-накрывающим множество $W^\gamma(x_2^\gamma)$ на совокупности $\mathbf{A}^\gamma(x_2^\gamma)$, а отображение $\Psi^\gamma(x_1^\gamma, \cdot) : X^\gamma \to Y^\gamma$ – замкнутым и $\beta$-липшицевым. Если $r(y^\gamma) \le R$, то существует определенное на $[a, \gamma]$ решение $\xi^\gamma$ уравнения (1), удовлетворяющее оценке $\rho_{X^\gamma}(\xi^\gamma, u_0^\gamma) \le (\alpha - \beta)^{-1} \rho_{Y^\gamma}(y^\gamma, w_0^\gamma)$.

**Литература**


1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // – Докл. РАН (2007) 416, №2, с.151–155.
2. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // – Дифференциальные уравнения. – 2009. №5, с.613–634.


## ПРИЛОЖЕНИЕ УСЛОВНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ


Жуковский С.Е.

*Российский университет дружбы народов, e-mail, s-e-zhuk@yandex.ru*


Пусть заданы $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $t_0, t_1 \in \mathrm{R}$, замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathrm{R}^n$, измеримая по первому аргументу, непрерывная по совокупности второго, третьего и четвертого аргументов функция $f : [t_0, t_1] \times \Omega \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^k$ и измеримая по совокупности первого и второго аргументов, непрерывная по третьему аргументу функция $\mathrm{K} : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$.

Рассматривается задача локальной разрешимости уравнения

$$f\left(t, \dot{x}, x, \int_{t_0}^{t} \mathrm{K}(t, s, x(s))\, ds\right) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t) \in \Omega. \tag{1}$$

Решение ищется в классе $AC([t_0, t_1], \Omega)$ абсолютно непрерывных функций $x$ таких, что функция $\dot{x}$ существенно ограничена и $\dot{x}(t) \in \Omega$ для п.в. $t$.

Достаточные условия локальной разрешимости уравнения получены в терминах условной -накрываемости функции $f$ по переменной $x$. Понятие условной $\alpha$-накрываемости отображения было введено в [1] и применялось в [2] для получения достаточных условий разрешимости обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. Свойства “безусловно” накрывающих отображений изучены в [3]. Дадим более общее определение этого понятия.

Пусть $(X, \rho_X)$, $(Y, \rho_Y)$ – метрические пространства, $U \subseteq X$, $W \subseteq Y$, $\mathrm{B} \subseteq X \times [0, \infty)$, $B_X(x, r) \subseteq U$ для любого $(x, r) \in \mathrm{B}$ (здесь и далее через $B_X(x, r)$ обозначается замкнутый шар в $X$ с центром в точке $x$ радиуса $r$).

**Определение:** *будем говорить, что отображение $\Psi : X \to Y$ является условно -накрывающим множество $W$ на системе $\mathrm{B}$ относительно $U$, если*

$$(x, r) \in \mathrm{B}\ B_Y(\Psi(x), \alpha r) \cap W \cap \Psi(U) \subseteq \Psi(B_X(x, r)).$$

Вернемся к задаче (1). Путь задана измеримая существенно ограниченная функция $u_0 \in AC([t_0, t_1], \Omega)$, число $R > 0$, окрестность $V$ точки 0 в $\mathrm{R}^m$, окрестность $B$ точки $x_0$ в

$\mathsf{R}^n$. Для п.в. $t \in [t_0, t_1]$, любых $\chi \in B,\ z \in V$ обозначим

$$U(t) = B_\Omega(\dot{u}_0(t), R), \quad W(t, x, z) = B_{\mathsf{R}^k}\left(f(t, \dot{u}_0(t), \chi, z), \alpha R\right)$$

**Теорема:** *пусть функции* $f, \mathsf{K}$ *являются ограниченными,* $f(t, y, \cdot\ , \cdot)$ *липшицева при п.в.* $t \in [t_0, t_1]$*, любых* $y \in U(t)$*, функция* $\mathsf{K}(t, s, \cdot)$ *липшицева для п.в.* $(t, s) \in [t_0, t_1]^2$*, функция* $f(t, \cdot, \chi, z)$ *условно -накрывает множество* $W(t, \chi, z)$ *относительно* $U(t)$ *на системе*

$$\mathsf{B}(t) = \{(v, r) : v \in U(t),\ 0 \le r \le R - |\, v - u_0(t)\,|\}$$

*при п.в.* $t \in [t_0, t_1]$*, любых* $\chi \in B,\ z \in V$*. Тогда если* $\operatorname{vraisup}_{t \in [t_0, t_1]} \left| f(t, u_0(t), x_0, 0) \right| < \alpha R$ *и* $0 \in \bigcup_{\chi \in B,\, z \in V} f(t, U(t), x, z)$ *при п.в.* $t \in [t_0, t_1]$*, то уравнение (1) локально разрешимо.*

**Литература**


1. Mordukhovich B.S., Wang B. Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Sci. (2004), V. 50, 2650–2683.
2. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифф. уравнения (2009), Т. 5, 613–634.
3. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН (2007), Т. 416, № 2, 151–155.


## МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ СЕРДЦА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИИ


Захаров Е.В., Калинин А.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова*


Рассмотрим область $\Omega$ в пространстве $R^3$, ограниченную снаружи замкнутой поверхностью $\Gamma_B = \Gamma_T \cup \Gamma_E$, а изнутри замкнутой поверхностью $\Gamma_H$. В $\Omega$ заданы непересекающиеся области $\Omega_i \subset \Omega$ с границами $\Gamma_i, i = 1,2.$ Определим $\Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2), \Gamma_0 = \Gamma_E, \Gamma_3 = \Gamma_H \cup \Gamma_T$. Требуется найти величину $\nabla u(x), x \in \Gamma_H$, при этом $u(x) = u_i(x), x \in \Omega_i, i = 1,2$,

$$\Delta u_i(x) = 0, x \in \Omega_i, i = 1,2, \tag{1}$$

$$u_0(x) = \psi(x), x \in \Gamma_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_0, \tag{3}$$

$$u_0(x) = u_i(x), x \in \Gamma_i, i = 1,2, \tag{4}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = \sigma_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, x \in \Gamma_i, i = 1,2, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — известная функция, $\sigma_i$ – заданные положительные константы, определяющие коэффициент электрической проводимости ткани, занимающей область $\Omega_i$.

Данная задача решается в два этапа. На первом этапе решается обратная задача электрокардиографии и находится функция $u(x), x \in \Gamma_H$. Методы решения этой задачи рассмотрены в [1]. На втором этапе вычисляется значение $\nabla u(x), x \in \Gamma_H$ с использованием проекционной формулировки метода граничных интегральных уравнений, приведенной в [2]. Таким образом, в данной работе рассматривается численный алгоритм решения обратной задачи электрографии, позволяющий определять на поверхности сердца одновременно и потенциал электрического поля сердца, и его градиент.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00259.

**Литература**


1. А.М. Денисов, Е. В. Захаров, А. В. Калинин, В. В. Калинин численное решение обратной задачи электрокардиографии для среды с кусочно-постоянным коэффициентом электропроводности// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – № 7. – С. 1233-1239.
2. A. Sutradhar, G.H. Paulino, L. J. Gray. Symmetric Galerkin Boundary Element Method – 2008. – Springer.


## ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ РИСКИ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА СУДНА

Заячковский А.О.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: azayachkovskiy@mail.ru*

Фундаментальное значение в экологических исследованиях имеют понятия рисков и уязвимости территорий к естественным и антропогенным воздействиям. С их помощью можно выявить потенциально опасные ситуации и объекты, количественно оценить степень тяжести возможных последствий катастрофических событий.

Настоящая работа ставит перед собой целью моделирование оптимальных маршрутов кораблей, минимизирующих экологические риски, построение зон экологического риска и оптимальных маршрутов по полям основных океанографических параметров состояния Мирового океана из базы данных «Мировой океан – ИВМ РАН». Система оценки экологического риска призвана в первую очередь предоставить для лица, ответственного за принятие решений, критерии, руководящие им при выборе решения.

В данной работе рассмотрена проблема загрязнения поверхностных вод, и представлен алгоритм расчета оптимального курса судна при угрозе экологического риска загрязнения. Приводится математический аппарат для задачи минимизации функционала стоимости при аварийном выбросе загрязняющего вещества. Используются комбинированные методы решения прямых и сопряженных задач, методы теории чувствительности моделей распространения загрязняющих веществ и метод малых возмущений.

Разрабатываемые технологии могут быть использованы природоохранными органами в целях осуществления государственного экологического контроля и аудита, а также аудиторскими и страховыми компаниями. Еще одним из возможных приложений предлагаемой технологии является ее использование для информационно-вычислительных систем (ИВС). Потребность в таких ИВС имеется во многих секторах экономики России, она обусловлена как рядом стратегических задач государства (вопросы национальной безопасности и т. д.), так и необходимостью развития национального научно-технического потенциала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 09-01-12029-офи-м, 09-05-00421, 10-01-00806), программы ФЦП «Кадры» (НК-408Р-42, НК-421Р-67).

**Литература**


1. Заячковский А. О. Моделирование экологических рисков загрязнения поверхностных вод океанов и морей на основе теории сопряженных уравнений // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010 — Выпуск 7, с. 91-98.
2. Агошков В. И. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задаче об оптимальных траекториях // Вычислительная математика и математическое моделирование: Труды международной конференции. Том I / Под ред. В. П. Дымникова. — М.:

Институт вычислительной математики РАН, 2000. — с. 36-53.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление — М.: Физматлит, 2007.
4. Марчук Г. И. Сопряженные уравнения / Курс лекций. — М.: Институт вычислительной математики РАН, 2001.

## О ПРИМЕНЕНИИ НЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ К СИСТЕМЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ Ф. ДЖОНА

Измаилов А.Ф.[1], Усков Е.И.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: [1)]izmaf@ccas.ru, [2)]ydoom@narod.ru*

Важный класс задач оптимизации с ограничениями равенствами образуют задачи, в решениях которых нарушается традиционное условие регулярности ограничений. Интерес к таким задачам вызван как сопряженными с ними теоретическими трудностями, так и наличием практических приложений [1]. В частности, применение к таким задачам традиционных ньютоновских методов может быть связано с серьезными проблемами, такими как потеря сверхлинейной скорости сходимости и потеря устойчивости решения по отношению к малым возмущениям входных данных [2]. Однако, в недавнем прошлом активно разрабатывались эффективные и устойчивые методы поиска особых решений общих систем нелинейных уравнений [2], [3–6], в связи с чем возникает вопрос о возможности применения данных методов к системе Лагранжа или системе условий оптимальности Ф. Джона.

В результате проведенного исследования был предложен подход к численному отысканию решений задач указанного класса, который состоит в построении (переопределенной) определяющей системы на основе условий оптимальности Ф. Джона и применении к этой системе метода гаусса-Ньютона. Была проведена полная характеризация (в терминах исходной задачи) предположений, требуемых для реализуемости и локальной сверхлинейной сходимости получаемого таким образом алгоритма.

**Литература**

1. Голишников М.М., Измаилов А.Ф. Ньютоновские методы для задач условной оптимизации с нерегулярными ограничениями // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46, № 8. С. 1369–1391.
2. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физматлит, 1999.
3. Брежнева О.А., Измаилов А.Ф., Третьяков А.А., Хмура А. Один подход к поиску особых решений системы нелинейных уравнений общего вида // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40, № 3. С. 365–377.
4. Измаилов А.Ф. Об одном классе определяющих систем для особых решений нелинейных уравнений // Вопросы моделирования и анализа в задачах принятия решений. М.: ВЦ РАН, 2002. С. 18–57.
5. Брежнева О.А., Измаилов А.Ф. О построении определяющих систем для отыскания особых решений нелинейных уравнений // ЖВМиМФ. 2002. Т. 42, № 1. С. 10–22.
6. Ерина М.Ю., Измаилов А.Ф. Метод Гаусса–Ньютона для отыскания особых решений систем нелинейных уравнений // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 5. С. 784–795.

# ИССЛЕДОВАНИЕ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК ИЗ ВОЛНОВОДОВ СЛОЖНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ильинский А.С.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: celd@cs.ms.su*

Использование радиопрозрачных волноводных окон (частотно-селективных поверхностей) является перспективным направлением создания антенн с повышенной прочностью и виброустойчивостью для диапазонов сантиметровых и миллиметровых волн. Одним из основных требований, предъявляемых к радиопрозрачным волноводным окнам, является хорошее согласование их поверхностей раскрыва со свободным пространством. Отражения от окна в значительной степени определяются отражениями от раскрывов ее волноводных элементов. В известных конструкциях радиопрозрачных окон используются квадратные, круглые и прямоугольные волноводы, открытые концы которых имеют невысокую степень согласования со свободным пространством. Кроме того, окна на основе квадратных и круглых волноводов не могут быть использованы в широком диапазоне частот, когда коэффициент перекрытия по частоте $К_f$, равный отношению верхней и нижней рабочих частот волноводного окна, превышает ~ 1,2…1,3. Одним из путей улучшения характеристик радиопрозрачных окон является использование волноводов со сложной формой поперечного сечения [1]. Изменяя параметры сечений, можно существенным образом влиять на внутренние и внешние характеристики излучателей и радиопрозрачных окон на основе таких волноводов.

В докладе приводятся результаты численного исследования коэффициента использования поверхности раскрыва (КИП) радиопрозрачных окон с плоскими поверхностями в виде периодических структур на основе двухполяризационных и широкодиапазонных волноводов сложного сечения с минимальными межцентровыми расстояниями между волноводами.

Для проведения исследований использована математическая модель бесконечной антенной решетки (АР) из волноводов произвольного сечения, построенная на решении внешней задачи проекционным методом сшивания полей, а внутренней - методом конечных элементов [2]. Учитывалось прохождение электромагнитных волн через обе поверхности окна. Стенки волноводов полагались бесконечно тонкими.

При относительно небольшой ширине рабочего диапазона частот ($К_f$<1,3…1,4) для построения волноводных окон, позволяющих обеспечить работу на вращающейся поляризации поля, наибольший практический интерес представляют квадратные, шестигранные, крестообразные и квадратные четырехгребенчатые волноводы. Такие волноводы образуют плотные «упаковки» сотового типа без наличия «паразитных» зон в апертуре, не относящихся к волноводным каналам окна.

Численное исследование и оптимизация характеристик антенных решеток (АР) на основе перечисленных двухполяризационных волноводов с минимальными межцентровыми расстояниями между элементами показали, что наименьший коэффициент отражения достигается при расположении волноводов в апертуре АР по треугольной сетке и выборе их размеров таким образом, чтобы верхняя частота одномодового режима волновода совпадала с верхней частотой рабочего диапазона АР.

### Литература

1. Василенко Ю.Н., Ильинский А.С., Харланов Ю.Я. Характеристики двухполяризационных волноводно-рупорных излучателей сложного поперечного сечения // Радиотехника и электроника. -1996.- Т.41. -№10. -С.1183-1187.
2. Гринев А.Ю., Ильинский А.С., Котов Ю.В., Чепурных И.П. − Радиотехника и электроника, 1979, №7, с.1291.

## ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС В МОДЕЛИ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ ДЛЯ ВОЗБУДИМЫХ СРЕД

Карамышева Т.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: taisia.karamysheva@gmail.com*

Одиночные импульсы, серии волн (в одномерном пространстве) и спиральные волны (в двумерном пространстве) – типичные структуры, возникающие в экспериментах и моделях возбудимых сред. Примером возбудимой системы является каталитическое окисление CO на поверхности Pt(1 1 0), для которого эксперименты выявили большое разнообразие пространственно-временных структур на поверхности катализатора, таких как импульсы, спирали и химическая турбулентность (диффузионный хаос). Модель для такой системы в одномерном случае описывается двухкомпонентной системой уравнений реакция-диффузия [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varepsilon} u(u-1)\left(u - \dfrac{b+v}{a}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \end{cases} \tag{1}$$

где $u$ концентрация CO на поверхности Pt, а $v$ относительная площадь окисленной поверхности. Параметры модели удовлетворяют условиям $0 < a < 1,\ b > 0,\ \varepsilon > 0$ Анализ решений системы (1) может быть проведен заменой переменной $z = x - ct$ переходом к трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = w \\ v' = \dfrac{1}{c}\left(v - f(u)\right) \\ w' = -cw + \dfrac{1}{\varepsilon} u(u-1)(u - \dfrac{b+v}{a}) \end{cases} \tag{2}$$

де производная берется по переменной $z$ В работе показано, что диффузионный хаос в системе уравнений в частных производных (1) описывается сингулярными аттракторами системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) в соответствии с теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого [2].

### Литература

1. M. G. Zimmermann, S. O. Firle, M. A. Natiello, M. Hildebrand, M. Eiswirth, M. Bär, A. Bangia und I. G. Kevrekidis, Pulse bifurcation and transition to spatiotemporal chaos in an excitable reaction-diffusion model, Physica D 110, 92-104 (1997).
2. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.

## ТЕОРЕМЫ О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ТЕРМИНАХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Киселёв Ю.Н.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: kiselev@cs.msu.su*

В [1] сформулирована теорема о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина для нелинейных управляемых систем. Основная версия теоремы относится к задаче оптимального управления

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x \in R^n, \ \ u \in U, \ \ t \in [t_0, t_1], \ x(t_0) = x_0, \ L \equiv \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x,u)\,dt \ \to \ \min_{u(\cdot)},$$

с функцией Гамильтона-Понтрягина в форме $K(t,x,\psi,u) = -f^0 + (\psi, f)$ и функцией максимума $M(t,x,\psi) = \max_{u \in U} K \equiv K(t,x,\psi,u)\big|_{u=u_*(t,x,\psi)}$ в предположении единственности максимизатора $u_*(t,x,\psi) = \arg\max_{u \in U} K(t,x,\psi,u)$. Краевая задача принципа максимума

$$\dot{x} = \ \ f(t,x,u)\big|_{u=u_*(t,x,\psi)}, \ \ x(t_0) = x_0, \ \ \dot{\psi} = -K'_x(t,x,\psi,u)\big|_{u=u_*(t,x,\psi)}, \ \ \psi(t_1) = 0,$$

предполагается разрешимой с решением $(x(t), \psi(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, которое позволяет найти экстремальное управление $u(t) = u_*(t, x(t), \psi(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, достаточно простой структуры (например, кусочно-непрерывной). Для обоснования оптимальности экстремальной тройки $(x(t), \psi(t), u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, приращение функционала записывается в следующей интегральной форме

$$\begin{aligned} -\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \{ K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - \\ - K(t, x(t), \psi(t)) \quad - \\ - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \}\, dt, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\Delta L \le \int_{t_0}^{t_1} \{ M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) \quad - \\ - M(t, x(t), \psi(t)) \quad - \\ - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)) \} dt. \end{aligned}$$

В условиях вогнутости по $x$ функции $m(t,x) = M(t, x, \psi(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, последнее неравенство влечёт оптимальность экстремальной тройки $(x(t), \psi(t), u(t))$: $\Delta L \ge 0$ для любого допустимого процесса. Основная версия теоремы о достаточных условиях оптимальности допускает модификации для: задач с особыми режимами, бесконечным горизонтом планирования, другими краевыми условиями и функционалом (задача Майера). Примеры применения описанной методики исследования оптимальности можно найти в [2–3] и других недавних публикациях. Этот подход интересен для изучения некоторых известных задач, анализа ряда новых задач управления, изложения в учебных курсах оптимального управления.

Работа поддержана грантами НШ-65690.2010.1, РФФИ 09-01-00378-а.

### Литература


1. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии», – М.: МАКС Пресс. – 2003. С. 57–67.
2. Киселёв Ю.Н. Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума Понтрягина // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под ред. Ю.С.Осипова, А.В. Кряжимского. МАКС Пресс. – 2005. – Вып. 1. С. 166–182.
3. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Тр. ИММ УрО РАН. – 2006. Т. 12. №2. С. 3–17.


## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ РАЗРАБОТКИ ГАЗОВОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ С УЧАСТИЕМ ПРОГНОЗА ЦЕН, ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ


Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su*


В докладе рассматривается следующая нелинейная задача оптимального управления с бесконечным горизонтом планирования

$$
\begin{cases}
\dot{y} = -\varepsilon u y, \\
y(0) = y_0, \\
J = \int\limits_0^\infty e^{-\nu t} p(t) u^\varepsilon y dt \to \max\limits_{u(\cdot)},
\end{cases}
$$

Здесь $y$ — положительная одномерная фазовая переменная, $u$ — скалярное управление, подчинённое геометрическому ограничению $u \geq 0$, $\nu$ — положительный коэффициент дисконтирования, $p(t)$ — недисконтированная «функция цены» — известная неотрицательная функция времени, удовлетворяющая условию равномерной ограниченности при $t \geq 0$, $\varepsilon \in (0{,}1)$ — известный параметр вогнутости задачи.

Данная модель является расширенным вариантом динамической модели разработки газового месторождения с участием прогноза цен, изменяющихся во времени. Решение задачи строится на основе принципа максимума Понтрягина. Для обоснования оптимальности экстремального решения привлекается теорема о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. Обсуждается вопрос о построении оптимального решения методом динамического программирования. Оптимальное решение исследуемой задачи допускает описание в компактной аналитической форме. Рассмотрен ряд конкретных примеров, иллюстрирующих зависимость оптимальной программы $u(t)$ от функции $p(t)$: при постоянном, кусочно-постоянном и периодическом прогнозе цен. В публикации [1] рассматривалась задача

$$
\dot{x} = -ux, x(0) = x_0 > 0, J = p \cdot \int\limits_0^\infty e^{-\nu t} u^\varepsilon x^\varepsilon dt \to \max\limits_{u(\cdot)},
$$

с постоянной «функцией цены» $p$ и постоянным оптимальным законом управления $u(t)$.

**Литература**


1. Скиба А.К. Исследование задачи оптимального управления для динамической модели газового месторождения // – Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс. – 2010. С. 118–119.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // – Материалы научного семинара «Мате-матические модели в экономике и биологии». М.: МАКС Пресс. – 2003. С. 57–67.
3. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полёта // – Сборник под редакцией Лейтмана Дж., М.: Наука – 1965.


## О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОКЕАНА


Кобельков Г.М.[1], Друца А.В.[2]

*Механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail:*
*[1)]kobelkov@dodo.inm.ras.ru, [2)]adrutsa@yandex.ru*


Рассмотрим систему уравнений крупномасштабной динамики океана

$$
u_t - \nu \Delta u + \nabla p + lu + u_1 u_x + u_2 u_y + w u_z = 0, \qquad u = (u_1, u_2), \nabla = (\partial_1, \partial_2)
$$

$$
\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho
$$

$$
divu + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \;\; divu = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 \tag{1}
$$

$$\rho_t - \nu_1 \Delta\rho + u_1\rho_x + u_2\rho_y + w\rho_z = 0$$

$$u(0,x) = u^0(x), \qquad \int_0^1 div u^0 dz = 0.$$

Задача (1) рассматривается в единичном кубе с условиями непротекания и свободного скольжения на $u$, условиями «твердой крышки» на $w$ и $\partial_n \rho = 0$. Для разностной схемы, аппроксимирующей (1) с порядком $O(h^2+\tau)$, которая требует на каждом шаге решения системы ЛАУ, доказана сходимость с порядком $O(h^{3/2}+\tau)$.

## К ЗАДАЧЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Корнев А.А.

*Механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: kornev@mech.math.msu.su*

Предложен и обоснован итерационный метод аппроксимации глобального устойчивого многообразия для траекторий седлового типа. Исходная задача сведена к построению семейства локально устойчивых многообразий, образующих подмножество искомого глобального многообразия. При этом для нахождения локальных многообразий применяется метод нелинейного уравнения [1]. Это позволяет применять полученные результаты для широкого класса полудинамических систем, в том числе, соответствующих уравнениям в частных производных. На основе данного подхода впервые численно решены задачи асимптотической стабилизации по начальным данным, краевым условиям, правой части с управлением по подобласти для неустойчивых траекторий квазидвумерных уравнений Навье-Стокса [2, 3].

**Литература**

1. Корнев А.А. Метод асимптотической стабилизации по начальным данным к заданной траектории // – Журн. вычисл. матем. и матем. физ. (2006) 46, №1, с. 37–51.
2. Kornev, A.A., Ozeritskii, A.V. Nonlocal stabilization of trajectories of saddle type// – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling (2010) 25, №16, p. 545–561.
3. Fursikov A.V., Kornev A.A. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations. (в печати).

## КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

Костин А.Б.

*НИЯУ МИФИ, Москва, e-mail: abkostin@yandex.ru*

Пусть $\Omega$ – это ограниченная область в $R^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ рассматривается линейная обратная задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий:

$$\rho(x,t)u_t - Lu = h(x,t)f + g(x,t) \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \ Bu = b(x,t) \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \times [0,T] \tag{2}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)d\mu(t) = \chi(x) \quad x \in \Omega \tag{3}$$

где функции $\rho, h, g, u_0, b, \mu, \chi$ – заданы, равномерно эллиптический оператор $L$ имеет вид:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(x)u + d(x,t)u \equiv L_0 u + d(x,t)u ,$$

а оператор краевых условий $B$ следующий: либо $Bu = u$, либо $Bu = \partial u/\partial N + \sigma(x)u$, здесь $N$ – внешняя конормаль, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \ge 0$ на $\partial\Omega$, причем в случае $Bu = \partial u/\partial N$ считаем дополнительно, что $L_0 1 \ne 0$ в $\Omega$. Функция $\mu(t)$ в условии нелокального переопределения (3) – скалярная, имеет ограниченную вариацию на $[0,T]$ и непрерывна при $t = 0$ справа. Пусть выполнены следующие условия на заданные функции:

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}); \rho, \rho_t \in C(\overline{Q}); c_0(x), b_i, \partial b_i/\partial x_i \in L_\infty(\Omega); d, d_t \in L_\infty(Q) \tag{4}$$

$$g, g_t \in L_2(Q); h, h_t \in L_{\infty,2}(Q); \rho(x,t) \ge \rho_1 > 0 \quad (x,t) \in Q,\ c_0(x) \le 0 \quad x \in \Omega \tag{5}$$

$$u_0, \chi \in W_2^2(\Omega);\ \exists \Phi, \Phi_t \in W_2^{2,1}(Q): B\Phi = b(x,t) \quad (x,t) \in S;\quad Bu_0(x) = b(x,0) \quad x \in \partial\Omega \tag{6}$$

$$|l(h)(x)| \ge \delta > 0,\ \Phi(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega;\ l(b)(x) = B\chi(x) \quad x \in \partial\Omega \tag{7}$$

Установлено, что задача (1)-(3) эквивалентно сводится к операторному уравнению второго рода с компактным в $L_2(\Omega)$ оператором. Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть выполнены условия (4)-(7), а $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega(t) \in W_1^1(0,T)$, причем справедливы неравенства: $\omega(t) \ge 0$ на $[0,T]$; $(\rho\omega)'_t + d\omega \le 0$, $l(h)^{-1} h(x,t) \ge 0$ в $Q$. Тогда существует и, притом единственное решение обратной задачи (1)-(3) $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$.

В данной работе результаты, полученные в [1-4] переносятся на обратные задачи с «нестационарным» оператором в параболическом уравнении и нелокальным переопределением (3). Она поддержана ФЦП «Кадры» (проект № П268).

**Литература**


1. Прилепко А.И., Костин А.Б. // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № 4. – С. 49-68.
2. Прилепко А.И., Тихонов И.В. // Известия РАН. Серия математическая. – 1994. – Т.58, № 2. – С. 167-188.
3. Тихонов И.В. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ. -матем. наук. МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМ и К, 1993 г.
4. Прилепко А.И., Костин А.Б. // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, вып. 1. – С. 89-94.


## РЕШЕНИЕ ВИДА КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР ТИПА СТУПЕНЬКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ТИПАМИ ФУНКЦИЙ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ


Левашова Н.Т.[1], Мельникова А.А.[2]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]natasha@npanalytica.ru, [2)]melnikova@physics.msu.ru*


Рассматривается краевая задача для системы эллиптических уравнений

$$\varepsilon^4 u'' = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in [0,1]$$
$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0 \tag{1}$$

с различными степенями малого параметра $\varepsilon$ в области $(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0,1] \times (0;\varepsilon_0]$, где $I_u$, $I_v$ - некоторые промежутки изменения переменных $u$ и $v$, соответственно, $\varepsilon_0 > 0$, а $f, g$ – достаточно гладкие функции.

При этом выполнены следующие требования:

Условие А1. Пусть уравнение $\gamma = 0.8, p = 1$ имеет относительно $u$ три корня $u = \varphi^i(v,x),\ i = 1,2,3$, такие что $\varphi^i(v,x) \in I_u$, $\varphi^1(v,x) < \varphi^2(v,x) < \varphi^3(v,x)$ всюду в $\overline{\Omega} = (v,x) \in I_v \times [0,1]$, причем $f_u(\varphi^{1,3}(v,x),v,x,0) > 0,\quad f_u(\varphi^2(v,x),v,x,0) < 0$.

Условие А2. Пусть каждое из уравнений $h^i(v,x) \equiv g(\varphi^i(v,x),v,x,0) = 0$, $i = 1,2,3$ имеет решение $v = v^i(x)$, причем всюду в $\overline{\Omega}$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^3(x)$; $h_v^{1,3}(v,x) > 0$.

Условие А3. Пусть $f_v(u,v,x,0) \le 0,\quad g_u(u,v,x,0) < 0$ всюду в области $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0,1]$.

Для задачи (1) стандартными методами [1] построена асимптотика решения в виде КСТС с двумя различными типам функций переходного слоя. Ранее, в [2] были сформулированы достаточные условия существования у задачи (1) решения указанного вида. Для более полного анализа задачи была написана программа, позволяющая получить фазовый портрет данной системы. Исследование фазовой плоскости позволило ослабить требования существования КСТС, полученные ранее. Обоснование проведено с помощью метода дифференциальных неравенств [3].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 10 -01-00-319.

**Литература**


1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
2. Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра. Математические методы и приложения (труды девятнадцатых математических чтений РГСУ, часть I) с.48-56, 2010.
3. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149.


## КОНТРАСТНАЯ СТРУКТУРА ТИПА СТУПЕНЬКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Левашова Н.Т.[1], Петровская Е.С.[2]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]natasha@npanalytica.ru, [2)]petrovskayaev17@mail.ru*

Рассматривается краевая задача для системы эллиптических уравнений

$$\varepsilon^4 u'' = f(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2 v'' = g(u,v,x,\varepsilon),\quad x \in [0,1]$$
$$u'(0) = u'(1) = 0,\quad v'(0) = v'(1) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon$ - малый параметр, $f$ и $g$ – достаточно гладкие функции.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие А1. Уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет единственное решение относительно функции $u$: $u = \varphi(v,x)$, причем, $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0,\ (v,x) \in \overline{\Omega} = I \times \overline{D},$ где $I -$ некоторый промежуток изменения переменной $v$.

Условие А2. Уравнение $h(v,x) \equiv g(\varphi(v,x),v,x,0) = 0$ имеет три корня $v^i = \varphi_i(x)$, $i = 1,2,3,$ причем для всех $x \in [0;1]$ выполнены неравенства $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$; $h_v(\varphi_i(x),x) > 0,\ i = 1,3;\ h_v(\varphi_2(x),x) < 0.$

Условие А3. (Условие квазимонотонности). Пусть $f_v(u,v,x,0) \le 0,\quad g_u(u,v,x,0) < 0$ всюду в области $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0,1]$.

Для задачи (1) стандартными методами [1] построена асимптотика решения в виде контрастной структуры типа ступеньки. Обоснование асимптотики в предположении выполнения условий А1 – А3 проведено с помощью метода дифференциальных неравенств [2].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 10 -01-00-319.

**Литература**

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
2. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149.

## ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Леонов А.С.

*НИЯУ МИФИ*

1. Рассматривается операторное уравнение $Az = u$, где $A: Z \to U$ – непрерывный инъективный оператор, $Z, U$ – нормированные пространства. Считаем, что $\bar{z} \in Z$ – решение этого уравнения для $u \in U$. Вместо точных данных $(A, u)$ известны их приближения $(A_h, u_\delta)$, определенные как в [1], с погрешностями $\eta = (h, \delta)$. Приближенные решения $z_\eta \in Z$ находятся с помощью вариационных регуляризующих алгоритмов (РА) с регуляризатором $\Omega[z]$ [1]. Наша основная задача – оценить точность найденного приближенного решения $z_\eta$.

2. Известно [2], что оценить эту точность **априорно** для некорректных задач невозможно без сильных предположений о неизвестном точном решении. Поэтому мы будем получать **апостериорные оценки точности** для $z_\eta$. С этой целью определим множество: $V_\eta = \{z \in Z: \|A_h z - u_\delta\| \le C\|A_h z_\eta - u_\delta\|, \Omega[z] \le C\Omega[z_\eta]\}$, где $C > 1$ – константа метода. Если $\bar{z} \in V_\eta$, то справедлива апостериорная оценка точности:

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \le \sup\{\|z_\eta - z\|: z \in V_\eta\} = \varepsilon(\eta).$$

Величину $\varepsilon(\eta)$ можно найти, вычисляя какую-либо экстремаль, реализующую глобальный максимум функционала $E[z] = \|z_\eta - z\|$ на множестве $V_\eta$.

3. В докладе излагается и обосновывается процедура вычисления оценочной функции $\varepsilon(\eta)$. Дается соответствующий численный алгоритм. Кроме того, вводится новый класс регуляризующих алгоритмов, называемых **экстраоптимальными** [3]. Они не только являются оптимальными по порядку точности, но также имеют апостериорную оценку точности $\varepsilon(\eta)$, оптимальную по порядку. Приводятся примеры экстраоптимальных РА и иллюстрации их применения к решению различных некорректных задач. В частности, с помощью экстраоптимальных РА решаются трехмерные обратные задачи продолжения потенциала [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00040-а, 10-01-91150-ГФЕН-а), АВЦП "Развитие научного потенциала Высшей школы" (проект 2.1.1/6827), а также проектов ГК Рособразования П268, П943.

**Литература**

1. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи // М.: Наука – 1995.
2. Леонов А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ // М.: УРСС – 2010.
3. Леонов А.С. Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах // – Вычисл. методы и программирование (2010) 11, №1, с.14–24.
4. Леонов А.С. Экстраоптимальные апостериорные оценки точности решения некорректных задач продолжения потенциальных геофизических полей // – Физика Земли (2011) №6, с.69–78.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ СВЕТА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Лопушенко В.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: lopushnk@cs.msu.su*

Рассеяние электромагнитных волн шероховатыми поверхностями является предметом интенсивного изучения в различных областях науки и техники таких как оптика, спектроскопия, эхо- и радиолокация, неразрушающий контроль и т.д. Наиболее популярными и известными аналитическими методами изучения двумерных шероховатых поверхностей являются метод Рэлея или метод малых возмущений, а также метод Кирхгофа или приближение физической оптики [1, 2]. Если первый метод хорошо работает в случае микрошероховатостей с малыми значениями среднеквадратичных высот (СКВ) и небольшими наклонами поверхности, то второй метод применяется при исследовании пологих поверхностей. К сожалению, области применимости этих методов перекрываются только в случае малых пологих шероховатостей [3].

Таким образом, представляет интерес разработка такого аналитического или полуаналитического метода, который бы работал в тех областях, где ни метод малых возмущений, ни приближение физической оптики не дают хороших результатов. Одним из таких методов является Теория среднего поля, предложенная недавно в работах [4, 5] и еще недостаточно изученная в области умеренно шероховатых поверхностей со значениями СКВ порядка длины волны падающего излучения. В данной работе предлагается математическая модель, представляющая собой модификацию теории среднего поля для расчета диаграммы рассеяния от достаточно шероховатых поверхностей, которые характеризуются значительными СКВ. В основе модели лежит интегральное представление рассеянного поля, записанное для объема, содержащего шероховатую поверхность. Тензор Грина соответствующего объемного интегрального уравнения является решением опорной задачи, сформулированной для среды с усредненной диэлектрической проницаемостью.

Предложенная математическая модель была протестирована с помощью серии металлических образцов, имеющих экспоненциальную функцию спектральной плотности поверхности и различные значения СКВ, выходящие далеко за пределы применимости метода малых возмущений. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показало хорошее соответствие диаграмм рассеяния для нескольких углов падения плоской волны и различных поляризаций.

Работа выполнена в рамках проекта Civilian Research & Development Foundation (CRDF), RC0-1348.

**Литература**

1. Beckmann P., Spizzichino A. The scattering of electromagnetic waves from rough surfac-

es // New York: Macmillan. – 1963.
2. Voronovich A.G. Wave scattering from rough surface // 2nd edn, Berlin: Springer. – 1998.
3. Soriano G., Gu´erin C.A., Saillard M. Scattering by two-dimensional rough surfaces: comparison between the method of moments, Kirchhoff and small-slope approximations // – Waves Random Media, (2002) **12**, pp. 63–83.
4. Sentenac A., Greffet J.-J. Mean-field theory of light scattering by one-dimensional rough surfaces // – J. Opt. Soc. Am. A, (1998) **15**, №2, pp.528-532.
5. Lopushenko V.V. Calculation of scattering from microroughness of filmed wafers // – Proc. of the 4st conference on electromagnetic and light scattering by nonspherical particals: Theory and applications. (1999) September 20-21, Vigo, Spain, p.231-238.

## ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Лукьянова Л.Н.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: lln@cs.msu.su*

В докладе рассматривается задача терминального управления для линейной системы:

$$\ddot{y}(t)=v(t),\ y\in R^2,\quad y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)\in M_1,\quad y(T)=y_t,\quad \dot{y}(T)\in M_2,\quad t\in[0,T], \tag{1}$$

при смешанных ограничениях вида

$$\sqrt{v_1^2(t)+v_2^2(t)}\le\frac{\rho}{l}\sqrt{\dot{y}_1(t)+\dot{y}_2(t)}\le\frac{\rho^2}{l} \tag{2}$$

Здесь $\rho, l$ положительные параметры, $y\in R^2$ – фазовая переменная, $v\in R^2$ – управление, $M_1$, $M_2$ – множества в $R^2$, содержащие точки, отличные от точки (0,0).. Рассматриваются задачи 1). нахождение программного управления $v(t)$, значений $y(0), \dot{y}(0), T,$ для которых соответствующее решение *y(t)* системы (1) удовлетворяет краевым условиям и соотношению (2) при $t\in[0,T]$; 2). нахождение позиционного [1] управления $v\big(t, y(t), \dot{y}(t)\big),$ для которого соответствующее решение *y(t)* системы (1) при малых отклонениях начальных данных приводит решение y(t) в момент $T_1 > T$ в окрестность целевого множества и выполнено соотношение (2) при $t\in[0,T_1]$.

Задачи управления 1), 2) для линейной системы (1) возникает при применении формализма динамической линеаризации [2, 3] к задаче терминального управления нелинейной моделью трехколесной тележки [4] с геометрическими ограничениями на управления. На основании модели трехколесной тележки рассчитываются управления движением трехколесных роботов.

Решение задачи управления в классе программных управлений строится с использованием подхода обратных задач динамики к решению задач управления, изложенному в работе [5]. Для построенных траектории и управлений проверяется соотношение (2) и доказывается, что существуют начальные и конечные значения системы (1) из множеств $M_1$, $M_2$, для которых при достаточно большом *T* соотношение (2) выполнено. Позиционное управление, решающее поставленную задачу терминального управления со смешанными ограничениями, строится на основе метода управления с поводырем Н.Н. Красовского [1]. В качестве траектории поводыря выбирается решение системы (1) при программном управлении. Построенное позиционное управление, приводит траекторию системы в окрестность целевого множества при малых отклонениях начальных условий от тех, для которых решена задача 1) . Приводится численный алгоритм нахождения параметров позиционного управления, при котором выполнено соотношение (2).

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 14, проект № 208; гранта РГНФ 10-02-00191.

**Литература**


1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой, М. Наука, 1985, 519 стр.
2. M.Fliess, J.Levine, Ph.Martin, P.Rouchon, A Lie-Backlund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems. - IEEE Transaction on automatic control, Vol.44, No.5,May, 1999,p.922-937.
3. Дорошенко Т.Г., Четвериков В.Н. Терминальное управление плоской системой. Нелинейная динамика и управление, М. Физматлит, Вып.3, 2003, с.191-200.
4. Лукьянова Л.Н. Задача избежания столкновения: линейная теория и приложения, МАКС Пресс, 2009, 216 стр.
5. Батенко А.П. Системы терминального управления, М. Радио и связь,1984, 159 стр.


## ОБ ОТСЛЕЖИВАНИИ ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА

Максимов В.И.

*Институт математики и механики УрО РАН, e-mail: maksimov@imm.uran.ru*

Метод экстремального сдвига — один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи — был предложен Н.Н. Красовским [1]. В дальнейшем он широко применялся при исследовании как собственно задач управления (в том числе, игрового), так и задач идентификации, обращения и т.п. Поясним суть этого метода на примере задачи отслеживания траектории системой

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовое пространство, $x(t_0) = x_0$ — начальное состояние, $B$ — $n \times m$-мерная матрица, функция $f(t, x)$ непрерывна по $t$ и Липшицева по $x$, $u \in P$ — управление, $P \subset R^m$ — ограниченное замкнутое множество. Пусть наряду с системой (1) имеется еще одна система того же вида

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) + Bv(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

с начальным состоянием $y(t_0) = y_0$. Эта система подвержена воздействию эталонного управления $v(\cdot)$, стесненного теми же ограничениями, что и управление $u(\cdot)$ в системе (1). Эталонное управление, а также отвечающая ему траектория системы (2) неизвестны. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряются состояния системы (1), а также состояния эталонной системы. Состояния $x(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in R^n$ — удовлетворяют неравенствам $\left| x(\tau_i) - \xi_i^h \right|_n \le h$. Здесь величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h$ в системе (1), позволяющего синхронно с развитием процесса осуществлять отслеживание траекторией $x(\cdot)$ этой системы траекторию $y(\cdot)$ эталонной системы. Суть метода экстремального сдвига состоит в выборе управления $u = u^h$ в виде

$$u^h(t) = u(\tau_i, \xi_i^h, y(\tau_i)) = \arg\min\{(\xi_i^h - y(\tau_i), Bu) : u \in P\} \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Пусть $|y_0 - x_0|_n \le h$. Тогда, как следует из результатов [1], для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $h_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что, если $h \in (0, h_1)$, $\delta \in (0, \delta_1)$, то справедливо неравенство

$\sup\limits_{t\in T}\left|x(t;t_0,x_0,u^h(\cdot))-y(t;t_0,y_0,v(\cdot))\right|_n\le\varepsilon$ для любого эталонного управления.

Таким образом, метод экстремального сдвига решает задачу отслеживания траектории управляемой системы при мгновенных ограничениях на управления ($u,v\in P$). В настоящем докладе мы рассмотрим случай, когда подобные ограничения отсутствуют, т.е. допустимым управлением (как эталонным, $v(\cdot)$, так и «истинным», $u(\cdot)$) может быть любая измеримая (по Лебегу) функция, суммируемая с квадратом ее евклидовой нормы. При этом мы укажем соответствующую модификацию принципа экстремального сдвига, воспользовавшись, следуя [2], идеей его локальной регуляризации.

**Литература**


1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры // М.: Наука – 1974. 451 с.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions // Basel: Gordon and Breach – 1995. 625 p.


## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ СО СМЕНОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВВА


Максимова И.С.

*Российский университет дружбы народов, e-mail: irismax@yandex.ru*


Целью настоящей работы является изучение управляемости дифференциальных систем в задаче со сменой фазового пространства. При решении поставленной задачи использовался аппарат опорных функций, теория многозначных отображений и дифференциальных включений.

Имеются два фазовых пространства $X=R^n$ и $Y=R^m$, движение объекта в которых описывается нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}=f(t,x(t),u(t)),\ u(t)\in U,\ t\in[0,\tau] \tag{1}$$

$$\dot{y}=g(t,y(t),v(t)),\ v(t)\in U,\ t\in[\tau,T],\text{ где} \tag{2}$$

$$U=\{u(t)\in R^n \mid u(\cdot)\in L_\infty[0,\tau]; u(t)\in U_1\subset R^n\},$$

$V=\{v(t)\in R^m \mid v(\cdot)\in L_\infty[\tau,T]; v(t)\in V_1\subset R^m\}$, $U_1$ и $V_1$ - выпуклые компакты. В $X$ заданы выпуклое начальное множество $M_0$ и не пересекающаяся с ним «гиперповерхность перехода» $\Gamma$. Когда объект, движущийся по закону (1), достигает $\Gamma$, происходит переход в пространство $Y$, заданный отображением $q: X\to Y$ (предполагается, что данное отображение $q$ переводит выпуклое множество в выпуклое). Дальнейшее движение объекта происходит в пространстве $Y$ по закону (2). В $Y$ задано конечное выпуклое множество $M_1$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), будет управляемым на отрезке $[0,T]$ из $M_0$ в $M_1$.

Предполагается также, что при переходе от системы (1) к дифференциальному включению $\dot{x}\in F(t,x,U)$, многозначное отображение $F(t,x,U)$ вогнуто по $x$ на множестве достижимости $K(\tau)$ для любого $t\in[0,\tau]$. Тогда условия управляемости можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Утверждение:** Для управляемости объекта, описываемого системами (1) и (2) при всех сделанных предположениях, достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$c(K_3(T),\psi)+c(M_1,-\psi)\ge 0,\forall\psi\in R^m.$$

Здесь $K_3(T)$ - множество достижимости системы (2) из множества $K_2(\tau)=q(K(\tau)\cap\Gamma)$.

**Литература**


1. Болтянский В.Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства // - Дифференциальные уравнения. – 1983. Т. XIX, №3, С. 518-521.
2. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // – Тр. МИАН СССР. - 1985, Т. 169. С.194-252.


## УЧЕТ ЛЕКСИКО-СЕМАНТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМЕ TREETON


Мальковский М.Г.[1], Арефьев Н.В.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: [1)]malk@cs.msu.su*


Алгоритм работы синтаксического анализатора системы Treeton [1] базируется на идее эвристического перебора. На каждом шаге анализа проверяется соответствие порождаемых синтаксических структур правилам русского языка (порядок слов, количество прямых дополнений глагола и пр.), и в случае несоответствия структуры штрафуются. Структуры с наименьшим штрафом обрабатываются в первую очередь, что позволяет получать наилучшие варианты анализа первыми. «Топологические» ограничения, подобные приведенным выше, описывают характеристики синтаксической структуры безотносительно ее лексического наполнения, поэтому их можно использовать в отсутствие какой-либо словарной информации. Однако такие ограничения не всегда позволяют отличить правильные структуры от неправильных. Например, в предложениях *Съел пирог с облепихой* и *Съел пирог с удовольствием* наряду с правильными будут выданы неправильные структуры (***съел→с→облепихой*** и ***пирог→с→удовольствием***). В этих случаях правильность синтаксической структуры определяется лексической и семантической сочетаемостью входящих в нее слов [2].

Сочетаемость в системе Treeton описывается матрицей, столбцы которой соответствуют словам, а строки – контекстам, в которых эти слова встречаются (в простейшем случае – соседним словам). Элементы матрицы – частоты встречаемости слов в различных контекстах – извлекаются из корпуса текстов. Использовать эти частоты для вычисления штрафа мешает присущая естественному языку разреженность: далеко не все пары сочетающихся слов встречаются в корпусе. Например, словосочетание *пирог с облепихой* в используемом нами корпусе не встречается, следовательно структура ***пирог→с→ облепихой*** может быть несправедливо оштрафована. В работе предлагается метод, позволяющий делать выводы о сочетаемости даже для тех слов, которые не встречаются вместе в корпусе.

Рассмотрим работу предлагаемого метода на примере словосочетаний *пирог с облепихой* и *пирог с удовольствием*. Сначала в матрице сочетаемости ищутся наиболее частотные контексты слова *пирог*. Среди них оказываются, например, слова *малина* и *черника*. Затем вычисляется мера семантического сходства слов *облепиха* и *удовольствие* с найденными словами. Простейшим примером такой меры для двух слов является число общих контекстов – строк матрицы, в которых соответствующие обоим словам элементы отличны от нуля. Для ягод число общих контекстов велико (например, *съесть, выращивать, вкусный*), поэтому структура ***пирог→с→облепихой*** не штрафуется. Структура ***пирог→с→удовольствием*** в свою очередь будет оштрафована, поскольку слово *удовольствие* встречается в основном в других контекстах.

Предлагаемый метод легко встраивается в систему Treeton и позволяет корректно штрафовать даже топологически безупречные структуры.

**Литература**


1. Мальковский М.Г., Старостин А.С. Система Treeton: Анализ под управлением штрафной функции // Программные продукты и системы. – 2009, №1. С. 33-35.
2. Апресян Ю.Д. Избранные труды, т.1. Лексическая семантика. М.: Школа «Языки русской культуры», Издательская фирма «Восточная литература» РАН. – 1995.

# СИСТЕМА МОРФО-СИНТАКСИЧЕСКОГО АНАЛИЗА TREETON: АППАРАТ ТРИНОТАЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКОЕ РАНЖИРОВАНИЕ

Мальковский М.Г., Старостин А.С., Арефьев Н.В.

*МГУ имени. М.В.Ломоносова факультет ВМК, malk@cs.msu.su*

Созданная на кафедре алгоритмических языков система Treeton представляет собой исследовательскую платформу, предназначенную для разработки и проверки методов решения различных задач, связанных с автоматическим анализом текстов на естественном (русском) языке. Для качественного решения большинства таких задач необходимо максимально полно учитывать различные лингвистические явления, в том числе синтаксические отношения. Рассмотрим основные принципы выявления и представления синтаксических отношений в анализаторе системы Treeton [1].

На вход синтаксического анализатора системы поступают морфологические интерпретации слов исходного предложения, построенные морфологическим анализатором и представленные в виде аннотаций (аннотация – это связанный с отрезком текста набор пар <атрибут, значение>). Для описания синтаксической структуры предложения был разработан формализм тринотаций. Тринотация – это аннотация, которой приписано множестве корневых деревьев, в узлах которых стоят другие тринотации, а дуги помечены названиями синтаксических отношений. Заметим, что поступающие на вход аннотации также удовлетворяют этому определению и называются тривиальными тринотациями. Использование тринотаций позволяет сочетать такие базовые подходы к описанию синтаксиса как деревья зависимостей и системы составляющих (ср. [2]), благодаря чему удается естественно описывать широкий спектр синтаксических явлений.

Процесс синтаксического анализа представляет собой перебор, на каждом шаге которого применяется одно из заложенных в систему синтаксических правил, связывающих существующие тринотации дугами или объединяющих их в группу. Тринотации, покрывающие предложение целиком, попадают на выход анализатора. Как показывает опыт, присущая естественному языку синтаксическая омонимия (неоднозначность анализа) при слепом переборе приводит к комбинаторному взрыву. Для борьбы с омонимией был предложен эвристический механизм динамического ранжирования порождаемых синтаксических структур: на каждом шаге перебора в первую очередь обрабатываются структуры, наилучшим образом соответствующие синтаксическим правилам языка. В результате лучшие варианты синтаксического анализа предложения появляются на выходе анализатора первыми, до завершения работы анализатора. К тому же, процесс анализа можно остановить в любой момент, при этом все потерянные варианты будут заведомо не лучше, чем выданные.

На базе изложенных принципов создана подсистема синтаксического анализа системы Treeton. В настоящее время ведутся работы по наполнению подсистемы синтаксическими правилами и исследованию различных методов оценки порождаемых в процессе анализа структур.

**Литература**

1. Мальковский М.Г., Старостин А.С. Система Treeton: Анализ под управлением штрафной функции // Программные продукты и системы. – 2009, №1. С. 33-35.
2. Гладкий А.В. Синтаксические структуры естественного языка в автоматизированных системах общения. М.: Наука. – 1985.

## К ВОПРОСУ ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Миняев С.И.

*ИСА РАН*

Рассматривается $k$ линейных стационарных объектов с соизмеримыми запаздываниями, заданных системами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i(d)x(t) + b_i(d)u(t) \\ y(t) = c_i(d)x(t) \end{cases}, i = 1,2,\dots,k, \tag{1}$$

где $d$ - оператор запаздывания (сдвига аргумента на $h$ назад, т.е. $d(x(t)) = x(t-h)$), $A_i(d)$- квадратные полиномиальные матрицы размера $n_i$, $b_i(d)$ и $c_i(d)$ - полиномиальные вектор-столбец и вектор-строка соответственно.

Постановка задачи одновременной стабилизации объектов (1) дискретным регулятором: существует ли такой единый дискретный регулятор, описывающийся дискретной передаточной функцией $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, где $\deg(q(z)) \geq \deg(p(z))$, полиномы $q(z)$ и $p(z)$ взаимно просты, который стабилизирует каждый из объектов (1) т.е. обеспечивает устойчивость всех замкнутых непрерывно-дискретных систем [1].

Исследование одновременной стабилизируемости объектов (1) осуществляется с помощью теории полиномиальных матриц (проверяется, являются ли матрицы $A_i(d)$ унимодулярными и приводимыми с помощью унимодулярных преобразований), показывается, что дискретный регулятор остается стабилизирующим при нестационарной замене переменных в уравнениях объектов (1).

Исследования одновременной стабилизируемости предполагается переход от непрерывно-дискретных систем и дискретным моделям с учетом выполнения условий невырожденности (непатологичности периода квантования $T$ ). Т.о. задача одновременной стабилизации непрерывных объектов с запаздыванием сводится к задаче одновременной стабилизации дискретных объектов без запаздывания.

Для решения последней задачи можно использовать методы, изложенные в [2].

**Литература**

1. Chen T., Francis B. Optimal sample-data control systems. 1994.
2. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры. УДК 517.977.

## О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ И ФИНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Моисеев Е.И.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова*

В работе рассматривается оптимальное граничное управление колебаниями струны, которые моделируются одномерным волновым уравнением. Исследуется случай управления силой на одном конце струны и свободного второго ее конца. Задачи граничного управления исследуются в терминах обобщенного решения соответствующих смешанных начально-краевых задач. Ранее в работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [1] рассматривался случай обобщенного решения из модифицированного класса Соболева $\hat{W}_2^1$, было найдено в явном виде оптимальное граничное управление. Далее в [2] рассматривался более общий случай пространства $\hat{W}_p^1$ для произвольного $p \geq 1$. В работе было показано, что при дополнительных ограничениях на начальные и финальные условия оптимальное управление задается той же формулой, что и при $p=2$.

В настоящей работе показано, что при $p \neq 2$ и произвольных начальных и финальных данных зависимость оптимального граничного управления от них может быть, вообще говоря, нелинейной. Приведен пример, когда оптимальное управление может быть найдено в явном аналитическом виде по формулам Кардано. Указываются условия, при которых зависимость будет линейной.

**Литература**


1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи Математических Наук. 2005. Т.60. № 6. С. 89 - 114.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой промежуток времени // Дифференциальные уравнения. 2007. Т.43. № 12. С.1655 - 1663.
3. Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением в $W_p^1$ струной со свободным концом // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44. № 5. С.709 - 711.


## ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ


Моисеев Т.Е.

*Факультет ВМК, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail tsmoiseev@mail.ru*


Рассматривается задача Трикоми для Уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Краевые условия это задание наклонной производной с постоянным углом наклона и задание первого краевого условия на другой части границы в эллиптической части области и задание нуля на одной из характеристик в гиперболической части области. Получено интегральное представления регулярного решения, в круговом секторе. Найдены конструктивные условия, когда однородная задача имеет нетривиальные решения, и когда она однозначна разрешима. Полученное интегральное представление обобщает известную формулу из [1].


Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ(10-01-00411), НШ(3514.2010.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 г.


**Литература**


1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М.,1981 г.
2. Моисеев Т.Е. О разрешимости задачи Трикоми для Уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанными краевыми условиями // - Дифференциальные уравнения, (2009), т.45, N 10, с.1512-1514
3. Моисеев Е.И. Применение метода разделения переменных для уравнений смешанного типа // - Дифференциальные уравнения (1990), т.26, N7, с.1160-1172.

# НИЖНЯЯ ОЦЕНКА АМЕРИКАНСКОГО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ОПЦИОНА НА ДВА АКТИВА

Морозов В.В., Муравей Д.Л.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова*

Бесконечный американский альтернативный опцион представляет собой ценную бумагу, держатель которой имеет право её предъявления в любой момент времени с целью получения по фиксированной цене исполнения одного из двух активов, имеющего наибольшую стоимость. Верхняя оценка стоимости была получена в [1]. В данной работе строится нижняя оценка, основанная на использовании следующих пороговых решающих правил: опцион предъявляется только в тот момент времени, когда отношение стоимости первого актива к стоимости второго актива впервые достигло одной из двух границ – верхней или нижней.

Оценка строится в рамках следующей модели финансового рынка (см., например, [2]): банковская ставка $r$ не зависит от времени $t$ и удовлетворяет условиям риск-нейтральности: $r=\alpha_i+\delta_i$, где $\alpha_i$ – средняя доходность $i$-го актива, а $\delta_i$ – интенсивность выплаты дивидендов. Стоимости активов $S_i(t)$ удовлетворяют уравнению геометрического броуновского движения: $dS_i(t)=S_i(t)(\alpha_i dt+\sigma_i dz_i(t))$, где $\sigma_i>0$ – волатильности активов, а $z_i(t)$ – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции $\rho$. Тогда стоимость опциона $V(S_1,S_2)$ в начальный момент времени может быть определена как $V(S_1,S_2)=\sup_{T'} E[e^{-rT'}\max\limits_i(S_i(T')-K)_+ \mid S_i(0)=S_i, i=1,2]$, где $K$ – цена исполнения опционов, а $T'$ – множество всех решающих правил предъявления.

Определим правило $T_{c_1,c_2}$: опцион предъявляется только в том случае, когда процесс $p(t)=S_1(t)/S_2(t)$ впервые достигает либо верхней границы $c_1>1$, либо нижней границы $0<c_2<1$. При использовании этого правила средний приведённый платёж по опциону равен $F(S_1,S_2,c_1,c_2)=E\left[e^{-rT_{c_1,c_2}}\max\limits_i(S_i(T_{c_1,c_2})-K)_+ \mid S_i(0)=S_i, i=1,2\right]$. Искомая нижняя оценка стоимости опциона записывается в виде $F(S_1,S_2)=\sup_{c_1,c_2} F(S_1,S_2,c_1,c_2)$.

Данная работа является обобщением статьи [2], где искомая нижняя оценка была получена в частном случае.Основным результатом работы является построение функции Грина для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами в бесконечной полосе, с функциями Хевисайда на границах. Полученная в явном виде функция Грина позволяет найти искомый средний приведённый платёж по опциону $F(S_1,S_2,c_1,c_2)$ в виде быстросходящегося ряда.

## Литература

1. Vasin A.A., Morozov V.V. Investment decisions under uncertainty and evaluation and of American options // International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 2006. V.15. N.3. P.323-336.
2. Морозов В.В., Муравей Д.Л. Нижняя оценка стоимости бесконечного американского альтернативного опциона на два актива // Прикладная математика и информатика. 2010. №35. С. 99-106.

## ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА НА БАЗЕ ТОЧЕК ДОСТУПА WI-FI

Намиот Д.Е.

*МГУ им. М.В. Ломоносова, факульет ВМК*

В работе рассматривается новый подход к использованию Wi-Fi сетей на мобильных телефонах. Предложена и реализована модель, которая позволяет привязать к точкам доступа Wi-Fi произвольные сообщения, которые будут автоматически доставляться на мобильные телефоны других мобильных абонентов, находящихся в зоне действия данной точки. Таким образом, точка доступа Wi-Fi выступает в роли сенсора (триггера), который обеспечивает срабатывание правил, определяющих доступность сообщений. Основная идея использования состоит в том, что в качестве таких базовых точек доступа могут выступать другие мобильные телефоны (точки доступа Wi-Fi, созданные на других мобильных телефонах). Владелец такой точки доступа может самостоятельно определять сообщения, которые будут доступны в зоне видимости его сети. Это позволяет определять динамические конфигурации для LBS, а также избежать этапа предварительной разметки (обследования) Wi-Fi сети, используемого в традиционных системах позиционирования в помещениях (indoor positioning). Определение координат в такой модели заменяется заданием информационного контекста, присутствующего в данном месте – то есть собственно тем, для чего и создается большинство LBS приложений.

Предложенная модель включает в себя внешнюю базу правил (сообщений), веб-интерфейсы для ее заполнения (редактирования), включая мобильные веб-приложения, а также мобильное приложение для сканирования сети (показа сообщений). В настоящее время прототип системы реализован на мобильной ОС Android. Система может быть портирована на все современные мобильные телефоны, имеющие поддержку Wi-Fi.

База данных системы представляет собой продукционную систему (набор логических правил), для работы с которой используется известный алгоритм RETE. Помимо веб-интерфейсов пользователя база данных поддерживает открытый REST API, который позволяет заполнять (редактировать) базу правил программно.

В дальнейшем предложенная модель может быть расширена, например, до использования Bluetooth по аналогичной схеме (сканирование сети с проверкой условий против внешней базы продукций).

В целом, в работе предложен новый, не описанный ранее класс мобильных сервисов, который имеет ясную модель применения. Например, автоматическая доставка специальных предложений на мобильные терминалы посетителей торговых комплексов, доставка локальных новостей в офисных зданиях, игровые системы в реальном пространстве и т.д.

**Литература**

1. Alessio De Angelis, Antonio Moschitta, Peter Handel and Paolo Carbone. Experimental Radio Indoor Positioning Systems Based on Round-Trip Time Measurement // Advances in Measurement Systems. – 2010. pp. 195-216 ISBN 978-953-307-061-2
2. Corral, P.; Pena, E.; Garcia, R.; Almenar, V.; de C. Lima, A.C. Distance Estimation System based on ZigBee, // Proceedings of 11th IEEE International Conference on Computational Science and Engineering Workshops, CSEWORKSHOPS '08, San Paulo, 16-18 July 2008, pp.405–411, ISBN: 978-0-7695-3257-8
3. Milos Borenovic, Aleksandar Neskovic Positioning in Indoor Mobile Systems // Radio Communications – 2010 pp. 597-619. ISBN 978-953-307-091-9

## РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ МЕТОДЫ СУПЕРРАЗРЕШЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Насонов А.В.

*Лаборатория математических методов обработки изображений, факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: nasonov@cs.msu.ru*

Задача повышения разрешения изображений является важной для широкого класса практических приложений, таких как обработка и анализ медицинских изображений, аэрокосмических снимков, данных видеонаблюдения, трансляция видеопотока низкого разрешения на современных широкоформатных дисплеях и ряда других задач.

В работе рассматривается задача суперразрешения — построение изображения высокого разрешения по нескольким изображениям низкого разрешения, полученным при небольшом движении камеры или снимаемого объекта.

Используется математическая модель получения изображений низкого разрешения:

$$u_k = DHT_k z, \quad k = 1,2,\dots,K, \tag{1}$$

где $z$ — изображение высокого разрешения, $u_k$ — изображения низкого разрешения, полученные из $z$ под действием оператора движения $T_k$ и оператора понижения разрешения $DH$, состоящего из оператора низкочастотной фильтрации $H$, в качестве которого мы используем свёртку с фильтром Гаусса, и оператора перехода на более грубую сетку $D$.

Задача нахождения изображения высокого разрешения $z$ по известным изображениям $u_k$, определяемая системой уравнений (1), является некорректно поставленной: её решение может не существовать, либо не являться единственным. В дискретном случае эта задача является плохо обусловленной. Для нахождения её решения используется метод регуляризации, базирующийся на методе регуляризации Тихонова [1]:

$$z_R = \arg\min_z \left( \sum_{k=1}^{K} \left\| DHT_k z - u_k \right\|_U^2 + \lambda \Psi[z] \right). \tag{2}$$

В работе проведен анализ выбора нормы невязки и стабилизатора. Показано, что эффективным является вариант $U = \ell_2$, $\Psi[z]$ — функционал билатеральной полной вариации [2]

$$\Psi[z] = \sum_{s,t=-p}^{p} \gamma^{|s|+|t|} \left\| S_x^s S_y^t z - z \right\|_1, \tag{3}$$

где $S_x^s, S_y^t$ — операторы сдвига по горизонтали и по вертикали на $s$ и $t$ пикселей соответственно, $\gamma, p$ — параметры метода. При повышении разрешения в 2, 3 или в 4 раза мы используем $\gamma = 0.8, p = 1$.

Реализован субградиентный метод минимизации функционала (2).

Также рассматривается задача построения приближённого решения задачи суперразрешения с использованием взвешенного медианного усреднения [3].

### Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач // М.: Наука, 1979. – С. 288.
2. Farsiu S., Robinson D., Elad M., Milanfar P. Fast and Robust Multi-Frame Super-Resolution // IEEE Transactions on Image Processing, V. 13, N. 10, 2004, pp. 1327–1344.
3. Nasonov A.V., Krylov A.S. Fast super-resolution using weighted median filtering // Proc. of International Conference on Pattern Recognition (ICPR'2010), 2010, pp. 2230–2233.

## РЕШЕНИЕ ВИДА КСТС В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-АДВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЕ БАЛАНСА АДВЕКЦИИ

Нефедов Н.Н.[1], Левашова Н.Т.[2], Ягремцев А.В.[3]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]nefedov@phys.msu.ru, [2)]natasha@npanalytica.ru, [3)]gremlin1980@yandex.ru*

Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=A(u,x)\frac{du}{dx}+B(u,x), \qquad (x,t)\in(0;1)\times(0;+\infty);\\ u(0,t)=u^0, \quad u(1,t)=u^1; \quad u(x,0)=u_{init}(x).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon>0$ – малый параметр, $u^0,u^1\in\mathrm{R}$.

Считаем, что выполнены следующие условия.

$1^0$. $A(u,x)$ и $B(u,x)$ - достаточно гладкие функции в области $(u,x)\in I_u\times(0;1)$, где $\bar{I}_u$ - некоторый промежуток изменения переменной $u$; $u_{init}(x)$ - достаточно гладкая функция при $x\in(0,1)$.

$2^0$. Существуют функции $u_l(x)$ и $u_r(x)$ - два решения вырожденного уравнения $A(u,x)\dfrac{du}{dx}+B(u,x)=0$, удовлетворяющие условиям $u_l(0)=u^0$, $u_r(1)=u^1$; $A(u_l(x)x)>0$, $A(u_r(x)x)<0$.

$3^0$. Условие баланса адвекции: $\displaystyle\int_{u_l(x)}^{u_r(x)} A(u,x)du\equiv 0,\ x\in(0;1)$.

Для задачи (1) построена асимптотика решения в виде движущегося сформировавшегося фронта. Построены верхний и нижний движущиеся барьеры, как модификации полученной асимптотики. При помощи метода дифференциальных неравенств доказано, что решение задачи (1) заключено между верхним и нижним барьерами и со временем выходит на стационар. Проведена оценка времени выхода фронта на стационар.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 10 -01-00-319.

### Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. : Высш. школа, 1990.
2. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149
3. Nefedov N.N., Nikitin A.G., Recke L. Moving Fronts in Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations. // Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2007 17 S.

## СТАЦИОНАРНЫЕ ФРОНТЫ В ИНТЕГРОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ РЕАКЦИЯ-АДВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ

Нефедов Н.Н.[1], Никитин А.Г.[2]

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова*
*e-mail: [1)]nefedov@phys.msu.ru, [2)]singul@rambler.ru*

В докладе рассматриваются краевые задачи для некоторого класса сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных задач, называемых в приложениях нелокальными уравнениями реакция-адвекция-диффузия, решения которых имеют стационарные внутренние переходные слои (фронты). Строится асимптотика по малому параметру таких решений и доказывается оценка точности этой асимптотики. Для обоснования построенной асимптотики используется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00319).

**Литература**


1. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Асимптотический метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, № 10, с. 1398-1404.
2. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для решений типа ступеньки в сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2001, т. 41, № 7, с. 1057–1066.
3. Nefedov N.N., Nikitin A.G., Recke L. Moving Internal Layers in the Singular Perturbed Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations // Preprint Nr. 2007-22. Humboldt University of Berlin, Institute of Mathematic, pp. 1-17.


## О ВЛИЯНИИ СПЕКТРА МАТРИЦЫ НА СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Никольский И.М.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: haifly@rambler.ru*

Доклад посвящен исследованию сходимости некоторых крыловских методов решения СЛАУ (BiCG, BiCGStab, QMR, GMRES, CGS). В качестве тестовых используются СЛАУ, матрицы которых имеют заранее заданный спектр. В работе показано, как меняется сходимость методов в зависимости от спектра матрицы. Кроме того, исследовано влияние предобуславливателя ILU на сходимость методов.

**Литература**


1. Николаев Е.С. Методы решения систем уравнений с разреженными матрицами. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. 5. T.VII - 1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. М.: Янус-К. 2009. - с.345-548.
2. Y. Saad. Iterative methods for sparse linear systems. - SIAM, 2003. - 460 c.


## ИЗУЧЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ВАРИАНТА МОДЕЛИ А.Д. БАЗЫКИНА «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Никольский М.С.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова*

Известная модель Лотки-Вольтерра «хищник-жертва» из математической биологии (см. [1]) послужила сильным толчком для развития и исследования новых, более адекватных моделей такого же типа, учитывающих критику исходной модели (см., например, [2], [3]). А.Д.Базыкин (см. [2]) предложил общую модель «хищник-жертва», которая удачно обобщает многие предыдущие модели в этом направлении. Обычно для моделей типа «хищник-жертва» обсуждаются различные качественные проблемы, связанные с устойчивостью. Изучение управляемых вариантов исходной модели Лотки-Вольтерра также привлекло внимание исследователей (см., например, [4–6]).

В настоящей работе рассматривается задача оптимального быстродействия для управляемого варианта общей модели «хищник-жертва», принадлежащей А.Д.Базыкину (см. [2]). Изучаемая управляемая модель возникает из модели А.Д.Базыкина с помощью аддитивной добавки в первое уравнение двумерной системы управления u(t), значения которого стеснены отрезком [p,q], где p неотрицательно, а q положительно. Отметим, что упомянутое первое уравнение описывает динамику численности (плотности) жертв, а управление u(t) моделирует управляемый приток извне добавочных особей.

Для описанного управляемого нелинейного объекта рассматривается задача оптимального быстродействия (см. [7], [8]). Автором были получены эффективные достаточные условия, обеспечивающие положительность компонент решения при произвольных допустимых измеримых управлениях. С помощью принципа максимума Понтрягина удалось найти простые и эффективные условия, при которых оптимальное управление обладает свойством релейности.

Для управляемого варианта исходной модели Лотки-Вольтерра (см.[1]) помимо релейности оптимального по быстродействию управления была обоснована разрешимость задачи управляемости для общего случая, когда начальная и концевая точки обе имеют положительные компоненты. Для общей управляемой модели вопрос о разрешимости задачи управляемости является трудным и неизученным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

**Литература**

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
3. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М. : Физматлит, 2010.
4. Goh B.S., Leitmann G., Vincent T.L. Optimal control of a prey – predator system. Math. Bioscience. 1974. V. 19. P. 263 – 286.
5. Yosida S. An optimal control problem of the prey – predator system // Funkcialaj Ekvacioj. 1982. V. 25. P. 283 – 293.
6. Колмановский В.Б., Спивак А.К. Об управлении по быстродействию системой «хищник – жертва» // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 502 – 506.
7. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
8. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М. : Наука, 1970.

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ФИТЦ-ХЬЮ-НАГУМО

Павельчак И.А.[1], Туйкина С.Р.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова,*
*e-mail: [1)]pavelchaki@gmail.com, [2)]tuik@cs.msu.su*

Рассматривается модифицированная математическая модель Фитц-Хью–Нагумо (1)-(5), которая может быть использована для моделирования процессов, связанных с анализом инфаркта миокарда.

$$u_t = D\Delta u - \chi(x,y)u(u-\alpha)(u-1) - w, \quad (x,y)\in G, t\in(0,T], \tag{1}$$

$$w_t = \beta u - \gamma w, \quad (x,y)\in G, t\in(0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0, \quad (x,y)\in \Gamma, t\in(0,T], \tag{3}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y)\in G, \tag{4}$$

$$w(x,y,0)=0, \qquad (x,y)\in G. \tag{5}$$

Для этой модели ставится обратная задача, состоящая в определении коэффициента $\chi(x,y)$ по дополнительным измерениям решения на границе области. Эта обратная задача может быть интерпретирована как задача определения формы и местоположения области сердца, пораженной инфарктом миокарда. Предлагается численный метод решения поставленной обратной задачи. В предположении о том, что функция $\chi(x,y)$ зависит от конечного числа неизвестных параметров, численное решение обратной задачи сводится к минимизации функции конечного числа переменных. Её градиент вычисляется при помощи решения сопряженной системы уравнений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие работу численного метода и показывающие его эффективность.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 11-01-00259).

**Литература**


1. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // Bull. Math. Biophysics. 1955. N 17. P. 257–278.
2. Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. N 50. P. 2061–2070.
3. Sundnes J., Lines G. T., Cai X. et al. Computing the Electrical Activity in the Heart. Springer, 2006.


## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Павлова Н.Г.

*Российский университет дружбы народов, e-mail: natasharussia@mail.ru*

Исследуется задача оптимального управления

$$\dot{x}=f(x,u,t);\ \ t\in[t_1,t_2];\ \ u(t)\in U\ \ \dot{\forall} t; \tag{1}$$

$$k^1(p)\le 0;\ \ k^2(p)=0;\ p=(t_1,t_2,x_1,x_2); \tag{2}$$

$$x_i=x(t_i),\ \ i=1,2;$$

$$G(x,t)\le 0; \tag{3}$$

$$J=J(p,u)=k^0(p)+\int_{t_1}^{t_2} f^0(x,u,t)dt\to\min. \tag{4}$$

Здесь $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — фазовая переменная, принимающая значения в $n$-мерном арифметическом пространстве $R^n$, $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)\in R^m$ — управление, $f^0$ и $k^0$ — скалярные функции, а векторные функции $f$, $G$, $k^1$ и $k^2$ принимают значения в пространствах $R^n$, $R^d$, $R^{d_1}$ и $R^{d_2}$ соответственно, где $n$, $m$, $d$, $d_1$, $d_2$ — заданные натуральные числа. Неравенства $k^1(p)\le 0$ и $G(x,t)\le 0$ понимаются как выполняющиеся покоординатно.

Для любых фиксированных $(x,t)$ вектор-функция $f$ линейна по переменной $u$ (т.е. справедливо представление $f(x,u,t)\equiv f_1(x,t)+f_2(x,t)u$), а функция $f^0$ выпукла по $u$.

Относительно функций $f^0$, $k^0$, $k^1$ и $k^2$ предполагается, что они непрерывно дифференцируемы, а функции $f$ и $G$ — бесконечно дифференцируемы.

Допустимым управлением называется всякая измеримая, существенно ограниченная функция $u(t)$, $t_1\le t\le t_2$, для которой $u(t)\in U$ для п.в. $t$. Здесь $U$ — выпуклый компакт.

Тройка $(x, p, u)$ называется допустимым процессом, если $u(\cdot)$ — допустимое управление, $x(\cdot)$ — соответствующее ему решение уравнения (1), удовлетворяющее ограничениям (3), а вектор $p$ удовлетворяет ограничениям (2).

Концевые ограничения (2) регулярны, т.е. для любого вектора $p$, удовлетворяющего (2), выполняются условия:

$$rang\,\frac{\partial k^2}{\partial p}(p) = d_2\,,\ \exists q \in R^{2n+2}:\ \frac{\partial k^2}{\partial p}(q) = 0\,,\ \left\langle \frac{\partial k_i^1(p)}{\partial p}, q \right\rangle < 0\,,$$

где $k_i^1$ — все те координаты вектор - функции $k^1$, для которых $k_i^1(p) = 0$.

Фазовые ограничения (3) также регулярны, т.е. для любых $(x,t)$, удовлетворяющих (3), существует $y = y(x,t) \in R^n$ такой, что

$$\left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x}(x,t), y \right\rangle > 0 \quad \forall i:\ \ G_i(x,t) = 0\,.$$

Минимум в рассматриваемой задаче ищется среди всевозможных, определенных каждое на своем конечном отрезке времени, решений (1), удовлетворяющих концевым и фазовым ограничениям (2), (3).

Для задачи (1)-(4) получены необходимые условия оптимальности при различных предположениях управляемости в концевых точках.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДАХ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Петров И.Б.

*Московский физико-технический институт, e-mail: petrov@mipt.ru*

Экспериментальное и расчетное теоретическое исследование трещиновато-кавернозных резервуаров в последнее десятилетие стало одним из основных направлений в развитии сейсмических методов разведки нефтяных и газовых месторождений. Из многочисленных публикаций, посвященных этой проблеме, можно выделить работы, нацеленные на изучение и использование рассеянных волн – откликов сейсмической энергии от трещиноватых и кавернозных коллекторов.

Ряд методик выделения зон повышенной концентрации рассеянной энергии, которые ассоциируются с трещиноватыми коллекторами, нашли практическое применение в отечественной сейсморазведке. Это технологии: Обнаружения граничной точки, Фокусирующих преобразований, Сейсмического локатора бокового обзора, Текстурно – Спектрального Анализа, Миграционного изображения рассеивающих объектов. Все эти методы нацелены на выявление трещиноватых и кавернозных резервуаров по аномалиям высокого уровня рассеянной энергии. Однако более детальные характеристики трещинно-кавернозных резервуаров в массивных вмещающих породах, такие как характер заполнения, пространственное положение и плотность трещин практически не определяются.

Для решения этих задач требовалось более детальное изучение характера распространения сейсмических волн в случайно-неоднородной упругой среде, каковой являются трещинно-кавернозные резервуары в массивных породах. Одним из наиболее корректных методов изучения характера распространения волн в таких средах является численное моделирование. В его основу должны быть положены системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающие распространение как продольных, так и поперечных волн в приближении малых деформаций.

Учет характеристических свойств систем уравнений в частных производных гиперболического типа, к которым относится динамическая система уравнений теории упругости, при построении наиболее корректно реализовывать алгоритмы расчета граничных точек, точек контактных границ, в определенной мере учитывать физику задачи (распространение возмущений вдоль характеристик). Все указанные особенности характеристических методов проявили себя при численном моделировании динамических процессов, происходящих в гетерогенных породах. В частности, было получено численное решение задачи об откликах от:

- изолированной трещины;
- системы горизонтальных субвертикальных трещин;
- системы малых произвольно ориентированных трещин;
- системы горизонтальных и криволинейных поверхностей раздела сред;
- об определении механических характеристик с трещиноватого резервуара.

Показано, что использование вычислительного метода позволяет решать широкий класс задач сейсморазведки и получать все необходимые характеристики волновых процессов, инициируемых сейсмическими возмущениями в гетерогенных геологических породах.

## ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Плужникова Е.А.

*Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,*
*e-mail: pluznikova_elena@mail.ru*

Для приложения теории накрывающих отображений [1], [2] к исследованию краевых задач в работе [3] рассмотрены накрывающие отображения в произведении метрических пространств. Здесь продолжены эти исследования и на основании полученных результатов предложен метод изучения задач управления для не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений.

Пусть $(X,\rho_X)$, $(Y,\rho_Y)$ – метрические пространства. Обозначим $B_X(u,r)$ – замкнутый шар пространства $X$ с центром в точке $u$ радиуса $r$.

**Определение** [1]. Отображение $\Psi: X \to Y$ называют *$\alpha$-накрывающим,* $\alpha > 0$, если для всех $r > 0$, $u \in X$ имеет место включение $\Psi(B_X(u,r)) \supseteq B_Y(\Psi(u),\alpha r)$.

Пусть заданы пространства $(Y_i,\rho_{Y_i})$ и полные пространства $(X_i,\rho_{X_i})$, $i=\overline{1,n}$. Положим $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $\rho_X = \left|(\rho_{X_1},\rho_{X_2},\ldots,\rho_{X_n})\right|$ и $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$, $\rho_Y = \left|(\rho_{Y_1},\rho_{Y_2},\ldots,\rho_{Y_n})\right|$. Пусть заданы отображения $F_i : X_i \times X \to Y_i$, $i=\overline{1,n}$. Определим отображение $\Phi: X \times X \to Y$ равенством $\Phi(v,x) = (F_i(v_i,x))_{i=\overline{1,n}}$.

**Теорема.** *Пусть, существуют такие* $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \ge 0$, $i,j=\overline{1,n}$, *что отображение* $F_i(\,\cdot,x_1,x_2,\ldots,x_n): X_i \to Y_i$ *для всех* $x \in X$ *является замкнутым и* $\alpha_i$*-накрывающим; отображение* $F_i(v_i,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n): X_j \to Y_i$ *при любых* $v_i \in X_i$, $x_1 \in X_1$, ..., , $x_{j+1} \in X_{j+1}$, ..., $x_n \in X_n$ – $\beta_{ij}$*-липшицевым. Тогда, если спектральный радиус матрицы* $\left(\alpha_i^{-1}\beta_{ij}\right)_{n\times n}$ *меньше 1, то отображение* $\Phi$ *будет накрывающим.*

Пусть заданы $q_0,q_1 \in R^n$, замкнутое множество $U \subset R^k$, а также функция $f:[a,b]\times R^n \times R^n \times U \to R^m$, удовлетворяющая условиям Каратеодори.

Применение приведенной теоремы к задаче управления

$$f(t,x(t),x'(t),u(t)) = 0,\ \ u(t)\in U,\ \ t\in[a,b],\ \ x(a)=q_0,\ \ x(b)=q_1,$$

позволяет доказать ее разрешимость, если, например, при всех $x,y \in R^n$, $u \in U$ отображение $f(t,x,y,\cdot): U \to R^m$ является $\alpha$-накрывающим; а отображения $f(t,\cdot,y,u)$,

$f(t,x,\cdot,u): R^n \to R^m$ – $\beta_1, \beta_2$-липшицевыми, соответственно.


**Литература**

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // – Докл. РАН (2007) **416**, №2, с.151–155.
2. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // – Дифференциальные уравнения. – 2009. № 5. С. 613–634.
3. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // – Вестник ТГУ. Серия: Естественные и технические науки. – Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.


## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ВВЕДЕНИЕМ АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ


Попов И.В., Фрязинов И.В.

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: popov@imamod.ru*


Данная работа является продолжением цикла работ посвящённых применению метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) для задач газовой динамики. В представленной работе рассматривается метод АИВ реализованный на неструктурированных треугольных сетках.

Этот метод (АИВ) состоит из трех этапов. На первом этапе по явной численной схеме без искусственной вязкости, но с поправками Лакса-Вендроффа (которые обеспечивают второй порядок по времени на гладком решении) находится «предикторное» решение. На втором этапе, это решение анализируется с помощью проверки соответствующих неравенств для определения областей, занятых контактными разрывами (КР), волнами разряжения (ВР), ударными волнами (УВ) и сеточными осцилляциями (ОСЦ). На третьем этапе к «предикторному» решению добавляются диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью равной нулю на КР и ВР, малой на УВ и большой в области ОСЦ. Такое введение искусственной вязкости не приводит к дополнительному размыванию КР, искажению ВР, малому размыванию УВ и сглаживанию осцилляций. Значения вязкости находятся из условия принципа максимума для схем с «замороженными» коэффициентами и обеспечивают монотонность (квазимонотонность) решения. Метод АИВ весьма прост, как при выводе уравнений, так и при реализации, в том числе параллельной.


**Литература**

1. Попов И.В., Фрязинов И.В.. Сеточный метод решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. // В кн. "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Материалы Седьмого Всероссийского семинара, (Казань, 21-24 сентября 2007 г.). - Казань: Казанский государственный университет, 2007. С. 223-230.
2. Попов И.В., Фрязинов И.В.. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60.
3. Попов И.В., Фрязинов И.В., Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. // Математическое моделирование. 2010, 22(1), 32-45.
4. Попов И.В., Фрязинов И.В., Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование. 2010, 22(5), 57-66.
5. Попов И.В., Фрязинов И.В., О методе адаптивной искусственной вязкости. // Мате-

матическое моделирование. 2010, 22(7), 121-128.
6. Попов И.В., Фрязинов И.В., О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование. 2010, 22(12), 23-32.
7. Попов И.В., Фрязинов И.В., Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. // Математическое моделирование. 2011, 23(3), 89-100.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЕВОЙ ЭМИССИИ С ПОВЕРХНОСТИ НАНОСТРУКТУР

Поляков С.В.

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: polyakov@imamod.ru*

В настоящей работе представляется численный подход к моделированию процессов полевой эмиссии с поверхности наноструктур. Актуальность физической проблемы связана с развитием нового поколения оптоэлектронных приборов, применяющихся при зондировании наноструктур и нанолитографии [1,2]. Конкретная физическая задача состоит в моделировании процессов полевой электронной эмиссии с поверхности графенового лезвия и углеродной нанотрубки в вакуум. Толщины лезвия и нантрубки составляют один атомный слой. Цель работы состояла в разработке математических моделей эмиссии для такого рода объектов, численных методов, алгоритмов и программ для современных параллельных компьютеров. Основная идея разработанного математического подхода состоит в совместном использовании классических и квантовых моделей сплошной среды, учитываающих процессы эмиссии как на макро-, так и на атомном уровне.

Для описания процессов на макроуровне в работе использовалась квазигидродинамическая модель переноса носителей заряда (электронов и дырок) вдоль поверхности лезвия (трубки) [3]. В области развитой эмиссии рассматривался процесс туннелирования электронов в вакуум через потенциальный барьер, создаваемый наноструктурой лезвия (трубки) и меняющимся под воздействием внешнего вытягивающего электрического поля. Для расчётов коэффициентов туннелирования в каждой точке поверхности решалось квазистационарное одномерное уравнение Шредингера [4]. Для определения формы барьера при заданной величине внешнего поля решалась задача минимизации функционала энергии системы остовов структуры и свободных валентных электронов на поверхности лезвия (трубки). В результате получилась трёхуровневая модель. Для её анализа были развиты численные подходы, основанные на методе сеток. Для дискретизации уравнений использовались конечно-объёмные аппроксимации. Параллельная программная реализация базировалась на гибридном подходе MPI+OpenMP, соответствующем архитектуре современных параллельных компьютеров.

На основе разработанного численного подхода было проведено моделирование процессов электронной эмиссии с поверхности графенового лезвия в квазиодномерной постановке. В численных экспериментах были подтверждены как эффективность разработанной численной модели, так и её компьютерной реализации. Расчёты также подтвердили необходимость учёта в модели структуры эмиссионной поверхности. Этот факт также согласуется с экспериментальными данными.

**Литература**

1. Татаренко Н.И., Кравченко В.Ф. Автоэмиссионные наноструктуры и приборы на их основе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 192 с.
2. Дьячков П.Н. Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применение / П.Н. Дьячков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 293 с.
3. Федирко В.А., Поляков С.В. Численное моделирование электронного переноса в полупроводниковом автоэмиттере. // Прикладная физика. 2000. Вып. 3. – С. 7-13.

4. Федирко В.А., Поляков С.В., Зенюк Д.А. Матричный метод для моделирования туннельного переноса. // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 5. – С. 3-14.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ ИНДИВИДУАЛИЗИРОВАННОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ТЕРАПИИ ОНКОЗАБОЛЕВАНИЙ

Родиченко Н.С.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова; Институт биологии гена, e-mail: rodichenko@cs.msu.su*

Целью данной работы является уменьшение токсичности и увеличение эффекта от системного введения лекарственных агентов для молекулярной терапии онкозаболеваний за счет оптимизации параметров дозирования, основанной на информации о конкретном случае заболевания.

Основная идея работы заключается в построении модельной системы, позволяющей оценить эффективность того или иного вида молекулярной терапии, основываясь на различных параметрах, неинвариантных относительно каждого отдельного случая заболевания. Работа строится на базе других работ в области оценки эффективности лекарственных препаратов с помощью математической модели, однако предлагаются новые параметры и ранее не использованные методы для оценки эффективности терапии.

В результате была построена математическая модель для оценки эффективности нелинейных методов терапии, модель была реализована в виде компьютерной программы. Одной из отличительных черт работы является использование для вычислений массивно-параллельных процессоров компании nVidia, что позволило более чем на порядок увеличить скорость вычислений (по сравнению с вычислениями на CPU).

Оценки, полученные с помощью разработанной модели, соответствуют оценкам, полученным в существующих работах, однако за счет новых параметров и реализованных методов разработанная модель позволяет получить индивидуализированные предсказания эффективности терапии.

### Литература

1. Graff CP, Wittrup KD. Theoretical analysis of antibody targeting of tumor spheroids: importance of dosage for penetration, and affinity for retention. Cancer Res. 2003; 63:1288-96
2. Thurber GM, Zajic SC, Wittrup KD. Theoretic criteria for antibody penetration into solid tumors and micrometastases. J Nucl Med. 2007; 48:995-9
3. Baish JW, Gazit Y, Berk DA, Nozue M, Baxter LT, Jain RK. Role of tumor vascular architecture in тnutrient and drug delivery: an invasion percolation-based network model. Microvasc Res. 1996; 51:327-46
4. P. Micikevicius, 3D finite difference computation on GPUs using CUDA, Technical Report NVIDIA, 2009
5. Ferenc Molnar Jr., Ferenc Izsak, Robert Meszaros, Istvan Lagzi, Simulation of reaction-diffusion processes in three dimensions using CUDA, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, In Press, 2011

## ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

Розенберг В.Л.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, rozen@imm.uran.ru*

Задачи реконструкции неизвестных характеристик динамических систем синхронно с развитием изучаемого процесса, возникающие во многих научных и прикладных разработках, как правило, являются некорректными и требуют применения регуляризирующих процедур. Один из подходов к их решению, предложенный в [1] и получивший название метода динамического обращения, основан на сочетании идей теории позиционного управления и теории некорректных задач. Задача реконструкции сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью). Регуляризация осуществляется локально на этапе выбора в каждый момент времени управления в модели. Метод динамического обращения был реализован для различных классов систем, в том числе частично наблюдаемых.

В докладе с позиций данного подхода обсуждается задача реконструкции неизвестного детерминированного возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении Ито специального вида [2] на основе неточных дискретных измерений части текущего фазового состояния. Обсуждаются условия, гарантирующие единственность возмущения, порождающего наблюдаемый сигнал. Предлагаемый разрешающий конечно-шаговый алгоритм является конструктивным; условия согласования его параметров, обеспечивающие устойчивость восстановления неизвестного возмущения, выписываются явно. При построении алгоритма используются идеи и конструкции работы [3], в которой исследуется аналогичная обратная задача для динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00378 и НШ-65590.2010.1) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1014).

**Литература**

1. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // – Изв. АН СССР, Тех. киберн.(1983), №2. с.51–60.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы // М.: Наука. – 1990.
3. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости. Свердловск: УрО АН СССР. – 1989. с.33–47.

## БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И МГД ТЕЧЕНИЙ

Рябков О.И.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com*

В данной работе было выполнено численное исследование различных течений изотермических вязких несжимаемых жидкостей двух видов: проводящей и непроводящей. Указанные среды описываются соответственно системой уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и системой уравнений несжимаемой МГД ([1]). Такой выбор объектов исследования был обусловлен близостью прямых численных схем необходимых для решения последних систем уравнений, наличием хорошо разработанных схем, способных разрешать нестационарные аттракторы в системе Навье-Стокса ([5]) и важностью несжимаемой МГД при описании течений жидких металлов и плазмы в каналах ([4], [6]). Последние течения имеют место, например, в т.н. магнитогидродинамических генераторах – специальных устройствах преобразования кинетической и тепловой энергии в электрическую.

Применяемые в работе численные схемы относятся к классу чисто проекционных ([3]) схем, в которых для выполнения условий соленоидальности полей скоростей и магнитной индукции ($div\, v = 0$, $div\, B = 0$) на каждом шаге по времени решается уравнение Пуассона. В случае непроводящей жидкости уравнение Пуассона записывается относительно давления или коррекции давления, в то время как в случае проводящей жидкости дополнительно решается уравнение Пуассона относительно некоторой эффективной нефизической величины. Последнее обстоятельство связано с тем, что уравнение $divB = 0$ в исходной системе несжимаемой МГД выполняется автоматически (при его выполнении в начальный момент времени) и коррекция нужна лишь для устранения т.н. численного магнитного заряда (ненулевого значения $divB$). Диффузионная и конвективная части аппроксимируются явным методом Рунге-Кутта третьего порядка точности по времени и пятого порядка точности по пространству. Для конвективной части используется WENO5 реконструкция. Операторы дивергента и градиента в процедуре коррекции также имеют пятый порядок точности по пространству.

В ходе работы были проведены численные расчеты двумерных течений Пуазеля и Гартмана, гидродинамического и МГД течений в каверне и течения в расширяющемся канале (симметричном и несимметричном). В течениях в каверне была обнаружена бифуркация Андронова-Хопфа образования периодического решения сопровождающаяся потерей устойчивости стационарного решения (ламинарного течения). Расчеты частично проводились на вычислительном комплексе IBM Blue Gene/P факультета ВМК МГУ.

**Литература**


1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред // М.: Наука - 1982.
2. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики // М.: Едиториал УРСС – 2004.
3. Cheng-Chin Wu A high order WENO finite difference scheme for incompressible fluids and magnetohydrodynamics // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. Vol. 101. No. 1 pp. 37–61.
4. Mistrangelo C. Three-dimensional MHD flow in sudden expansions // Wissenschaftliche Berichte FZKA. 2006. Vol. 7201.
5. N.M. Evstigneev, N.A. Magnitskii, S.V. Sidorov On the nature of turbulence in a problem on the motion of a fluid behind a ledge // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 1.
6. U. Muller, L. Buhler Magnetofluiddynamics in Channels and Containers // Springer – 2001.


## ДВУХФАЗНАЯ ТРЁХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МГД-СТАБИЛЬНОСТИ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЁРА


Савенкова Н.П.[1], Анпилов С.В.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова,*
*e-mail: [1)]mkandrew@mail.ru, [2)]svanpilov@inbox.ru*


Предлагается трехмерная модель электролиза алюминия, основанная на двухфазном приближении для смеси двух вязких жидкостей. За основу модели берется система уравнений Навье-Стокса для описания процессов течения жидкости и трехмерная система уравнений Максвелла для расчета токов и электромагнитных полей. Разработанная трехмерная модель позволяет работать в реальной геометрии - учитывать геометрическое распределение анодов, форму рабочего пространства электролизной ванны. Таким образом, предложенная модель позволяет проводить математический эксперимент по наблюдению работы ванны в случае возникновения большинства основных неполадок. При варьировании различных параметров, таких как, последовательность замены анодов, форма и расположение анодов, конфигурация настыли, величины подводимых токов, возможно достижение повышения выхода по току и устранения неполадок в работе ванны, что имеет практическое значение, может дать рекомендации по оптимизации технологического процесса электролиза алюминия и служить повышению эффективности производства.

**Литература**


1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. –М.: Наука, 1978.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. –М.: Наука, 1980.


## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ И С УЧЕТОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ


Самсонов С.П.[1], Кулевский А.В.[2]

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова,*
*e-mail: [1)]samsonov@cs.msu.su, [2)]KulevskyAV@cs.msu.su*


Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = x_0, \quad u \in U(t),$$

где $A$ – квадратная матрица размерности $n \times n$, $x$ – вектор фазового состояния размерности $n$, $U(t)$ – измеримое многозначное отображение. Требуется из произвольной начальной точки $x_0$ перейти в начало координат за наименьшее время. Это время оптимального перехода обозначим через $\tau$. Предлагается численный метод нахождения времени быстродействия $\tau$ с заданной точностью и с учетом погрешностей вычислений.

**Литература**


1. Самсонов С.П. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестник Московского университета. 1983, Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, №3, с. 68-71.
2. Самсонов С.П. Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления, 2009, Выпуск 4, с. 156-158.


## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В АКВАТОРИИ БЕЛОГО МОРЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ


Сахарных Н.А.[1], Пасконов В.М.[2], Березин С.Б.[3]

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,*
*e-mail: [1)] nikolai.sakharnykh@gmail.com, [2)]paskonov@cs.msu.su, [3)]s_berezin@cs.msu.su*


Работа посвящена исследованию трехмерных нестационарных течений в акватории Белого моря при различных температурных режимах набегающего потока. Для моделирования использовались полные уравнения Навье-Стокса, включая уравнение неразрывности, уравнения движения и уравнение энергии. Замыкание системы проводилось с помощью уравнения состояния. Для решения полной системы использовался численный метод покоординатного расщепления с локальными и глобальными итерациями [1]. Метод был модифицирован для расчета течений вязких жидкостей в трехмерной области сложной формы. Модель Белого моря для построения расчетной сетки была получена из публичной базы данных по рельефу. Проведен анализ и выявлены некоторые закономерности; также подтверждены старые результаты, которые были получены в других работах. Программная реализация поддерживает стандарт NetCDF для входных и выходных данных, что позволяет использовать различные типы визуализации результатов в системе DataSetViewer [2].

Была разработана эффективная параллельная реализация модифицированного численного метода для архитектуры GPU в программной модели CUDA. Для этого был проведен анализ различных вариантов представления данных и алгоритмов решения трехдиагональных систем на графических процессорах [3]. Был проведен сравнительный анализ производительности архитектур многоядерных процессоров Intel Nehalem и массивно-параллельного процессора NVIDIA Tesla C2050. Продемонстрировано преимущество графических процессоров Tesla на данной задаче, за счет чего удается получать результаты расчетов в десятки раз быстрее. Это ускоряет анализ структуры течений для различных конфигураций и предоставляет большую свободу для исследования сложных процессов в Белом море.

**Литература**


1. Пасконов В. М., Березин С. Б., Корухова Е. С. Динамическая система визуализации для многопроцессорных компьютеров с общей памятью и ее применение для численного моделирования турбулентных течений вязких жидкостей. – Москва, Вестник МГУ, 2007.
2. Sakharnykh N. Efficient Tridiagonal Solvers for ADI methods and Fluid Simulation. – GPU Technology Conference 2010.


## РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ.


Соловьев В.В.

*НИЯУ МИФИ, г. Москва, e-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com*


Пусть $q>0,\ 0<\alpha<1$ – фиксированные числа, $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, $(y,x)=(y,x_1,...,x_n)\in R^{n+1}, G\subset R^n$ – ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, $\Omega=(-q,0)\times G\subset R^{n+1}$. Определим пространства функций $U(\Omega)=\{u\in C(\overline{\Omega}):U\in C^{2,\alpha}(\Omega)\}$, $U_1(\Omega)=\{u\in U(\Omega):u_{yy}\in U(\Omega)\}$, и пространства $F(G)=\{f\in C(\overline{G}):f\le 0, f\in C^{\alpha}(G)\}$, $H(G)=\{\chi\in C(\overline{G}):\chi\in C^{2,\alpha}(G)\}$. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times F(G)$ из условий:

$$-\Delta u(y,x)=f(x)u(y,x),(y,x)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(y,x)=\nu(y,x),(y,x)\in\Gamma=[-q,0]\times\partial\Omega,u(-q.x)=0,x\in\overline{G}, \tag{2}$$

$$u_y(0,x)=0,u(0,x)=\chi(x),x\in\overline{G}. \tag{3}$$

Для формулировки теоремы разрешимости для обратной задачи (1)-(3) проведем некоторые дополнительные построения. Пусть $\Omega_1=(-q,q)\times G,\ \tilde{\nu}(y,x)$ – четное продолжение по $y$ при каждом фиксированном $x$ функции $\nu(y,x)$ на множество $\Gamma_1=[-q,q]\times\partial G.$ Определим функцию $\overline{w}(y,x)$ как решение следующей задачи Дирихле в классе $U(\Omega_1)$:

$$-\Delta\overline{w}(y,x)=0,(y,x)\in\Omega_1,\overline{w}(y,x)=(\tilde{\nu})_{yy}(y,x),(y,x)\in\Gamma_1,\overline{w}(\pm q,x)=0,x\in\overline{G}.$$

Теорема. Пусть $\nu, \nu_{yy} \in C(\Gamma)$, выполнены условия согласования $\nu(-q,x) = \nu_{yy}(-q,x) = 0$, $\nu_y(0,x) = 0$, $x \in \partial G$ и неравенства $\nu(y,x) \ge 0$, $\nu_{yy}(y,x) \le 0$, $(y,x) \in \Gamma$. Тогда для любой функции $\chi \in H(G)$ удовлетворяющей условиям согласования $\chi(x) = \nu(0,x)$, $x \in \partial G$ и неравенствам $\chi(x) \ge \chi_0 > 0$, $\Delta_x \chi(x) + \overline{w}(0,x) \ge 0$ существует единственное решение обратной задачи (1)-(3), пара функций $(u, f) \in U_1(\Omega) \times F(G)$.

## МОНОТОНИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВНЕДРЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Трощиев Ю.В.

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: yuvt@cs.msu.su*

Предлагается метод улучшения свойств монотонности существующих разностных схем путем встраивания в схему специального оператора. Другие свойства схем при этом сохраняются. Рассматривается разностная схема для стационарной задачи [1-4]:

$$A(u) = 0, \tag{1}$$

где $u$ – сеточная функция, $A$ – оператор, в общем случае нелинейный. Предполагается, что схема написана методом баланса. Схема представляется в виде

$$F(D(u)) = 0, \tag{2}$$

где оператор $D$ вычисляет значения производных до нужного порядка в нужных точках, а оператор $F$ реализует соотношения баланса для исследуемого уравнения. Операторы $F$ и $D$ зависимы только в том смысле, что значения оператора $D$ являются аргументами оператора $F$. Обычно оператор $D$ является «явным» – вычисляет значения производных по прямым формулам с использованием нескольких окружающих точек шаблона. Предлагается заменить оператор $D$ на «неявный» оператор $\widetilde{D}$

$$F(\widetilde{D}(u)) = 0, \tag{3}$$

вычисляющий значения вектора производных на основе вектора сеточной функции как решение уравнения, т.е. проводится аналогия между неявными схемами по времени и по пространству [4,5]. Оператор $\widetilde{D}$ конструируется по определенному алгоритму на основе оператора $D$, причем проверка такой конструкции на стационарных уравнениях движения несжимаемой жидкости показала, что в результате существенно улучшаются свойства монотонности решения. Хотя расчеты производились в самом простом случае: кубическая область и равномерная сетка, но метод, по-видимому, обобщается на многие другие случаи. Могут быть построены «явные» операторы $\widetilde{D}_1$ и $\widetilde{D}_2$ такие, что

$$\widetilde{D}_1^{-1} \widetilde{D} \widetilde{D}_2 = E, \tag{4}$$

где $E$ – тождественный оператор. Это позволяет сократить объем вычислений при реализации схемы.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // – М.-Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1951 – 660 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем // – М.: «Наука», 1977 – 656 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы // – М.: «Наука», 1978 – 512 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем // – М.: «Наука», 1973 – 415 с.
5. Трощиев В.Е., Трощиев Ю.В. Монотонные разностные схемы с весом для уравнения переноса в плоском слое // – Математическое моделирование – **15**, № 1, 2003 –

с. 3-13.

# О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КППФ С ПАРАМЕТРОМ

Терентьев М.А.

*Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: mterentyev@mail.ru*

В работе рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения типа Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера:

$$\begin{aligned} &u_t - \varepsilon^2 u_{xx} = u^2 - u, \quad (x,t) \in (0;1)\times(0;+\infty); \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0; \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – произвольный параметр, $u_0(x)$ – гладкая функция, равная нулю в граничных точках. Устойчивым стационарным решением для (1) является функция $u_s(x) \equiv 0$. Область влияния этого стационарного решения, как известно, составляют функции $u_0(x) \le 1$ при $0 < x < 1$, т.е. в случае таких начальных данных при $t \to +\infty$ имеет место предельный переход решения задачи (1) к стационарному решению для всех $\varepsilon$.

Представляет интерес исследовать поведение решения задачи (1) при произвольных начальных данных. Для этого с использованием техники пробных функций Похожаева [1] в данной работе получено следующее *необходимое* условие существования глобального решения задачи (1):

$$\int_0^1 u_0(x)\phi(x)dx \le V_\varepsilon[\phi], \quad \forall \phi \in K_\phi, \tag{2}$$

где $V_\varepsilon[\phi]$ – некоторый однородный степени 1 нелинейный функционал, а $K_\phi$ – некоторый специальный класс пробных функций, связанные с типом нелинейности, оператором диффузии и граничными условиями задачи (1), причем $\phi(x) \ge 0$ и $V_\varepsilon[\phi] > 0$.

Показано, что если $u_0(x) > 1$ в некоторой точке $x \in (0;1)$, то найдется такая пробная функция $\phi$, что неравенство (2) нарушается при достаточно малых $\varepsilon$. Это влечет отсутствие глобального решения задачи (1). Малость $\varepsilon$ существенна.

Если начальные данные зависят от $\varepsilon$, то условие (2) также может быть использовано для нахождения функций $u_0(x,\varepsilon)$, при которых не существует глобального решения, однако явное описание такого класса функций представляет отдельную проблему.

В заключение, пока что на правах **гипотезы**, предлагается следующее утверждение: необходимое условие (2) является также и *достаточным* условием существования глобального решения задачи (1). Неравенство (2) естественно понимать как неравенство для $u_0(x)$ в терминах обобщенных функций.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 10-01-00219).

**Литература**

1. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // – Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 2001. Т. 234.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Терновский В.В.[1], Хапаев М.М.

*Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: [1)]vladimir.ternovskii@gmail.com*

Рассматривая задачу оптимального управления как обратную, для поиска решения целесообразно применять численные методы теории некорректных задач. Для этого традиционную постановку задач управления необходимо переформулировать в задачу на условный экстремум с интегральными и локальными ограничениями. Количество используемых интегральных ограничений связано с числом точек переключения. Моделирование переходных процессов управления рассмотрено в рамках задач быстродействия для нелинейного маятника с трением и уравнения Ван Дер Поля.

Численный метод поиска неизвестной управляющей функции разработан в соответствии с методикой решения обратных некорректных задач при условии компактности множества достижимости. Обычная практика минимизации регуляризирующего (сглаживающего) функционала несостоятельна в задачах управления с возможными разрывными решениями, так как придется «угадывать» разрывное управление в гладких кривых, исчезают точки переключения. Новый метод сводится к минимизации функционала времени на ограничениях. В свою очередь, в интегральные ограничения входят неизвестные фазовые переменные, являющиеся решением краевой задачи. Метод позволяет решать задачи с особыми и неизмеримыми управлениями. Преимущество развиваемого подхода состоит в возможности использования априорной информации о функциональном классе управлений в целях правильного выбора класса интерполяции.

В процессе численного моделирования используется адаптивная сетка и метод случайного поиска, причем положение узлов сетки является решением задачи минимизации целевого функционала.

# НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Терновский В.В.[1], Хапаев М.М.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: [1)]vladimir.ternovskii@gmail.com*

В Фурье анализе приближенных данных возникает задача восстановления периодических функций. Для этих целей обычно используют ряд регуляризированный ряд Фурье с подправленными коэффициентами.

Авторы предлагают конвертировать некорректно поставленную задачу представления функции рядом Фурье в вариационную задачу на условный экстремум.

Авторы настоящей работы рассматривают ряд Фурье как один из возможных способов решения некорректной задачи, регуляризация которого не имеет практического смысла, так как вся информация о функции уже содержится в коэффициентах Фурье.

В этом нет ничего особенного, так как ряд Фурье воспроизводит функцию, заданную своими коэффициентами Фурье, которые представляют собой правые части системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = f_k .$$

То есть вычисление коэффициентов Фурье - прямая задача, а восстановление функции по коэффициентам - обратная некорректная.

Численное решение задачи минимизации на адаптивной сетке проводится методом случайного поиска. Отметим преимущества предлагаемого подхода:

1. Отсутствует эффект Гиббса при специальном выборе класса интерполяции.
2. Учитывается ошибка измерения каждого коэффициента Фурье
3. Метод позволяет восстанавливать функции, ряд Фурье которых расходится

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Диффузия информации в социальной группе: построение оптимальных программ и синтеза. 6
Александров П.А., Еленин Г.Г. О консервативности вычислительных методов для задачи о движении материальной точки в поле кубического потенциала. 6
Асеев С.М., Veliov V.M. Принцип максимума Понтрягина для «обгоняющего» оптимального управления. 7
Баев А.В. Математическое моделирование рефракции акустической волны в окрестности каустики. 8
Барсукова М.Г. Быков А.А. Применение метода Галёркина для расчета распространения волн в слоистых средах с полупрозрачными экранами. 8
Безродных С.И., Власов В.И. О гармонических отображениях плоских областей. 9
Белянкин Г.А., Таразевич А.В.. Исследование оптимального контракта в задаче мотивирования агентов принципалом в модели с двумя агентами и случайным исходом. 10
Березина Н.И., Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Итерационный метод решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием квазиодномерного приближения. 11
Богачев К.Ю. Решение задачи фильтрации на параллельных ЭВМ. 12
Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е. Математические задачи теории волноведущих систем при наличии входящих ребер. 12
Боголюбов А.Н., Кобликов А.А., Шапкина Н.Е. Анализ и синтез антенных решеток с фрактальными характеристиками излучения. 13
Боголюбов А.Н., Мухартова Ю.В., Гао Ц. Начально-краевая задача для электромагнитного поля в области с киральным заполнением. 14
Бондаренко Н.В., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В. О решении задачи управляемости для одной нелинейной трехмерной системы со скалярным управлением. 15
Буданова А.В. О построении функциональных наблюдателей для систем с запаздыванием. 16
Букжалёв Е.Е., Чернаков В.В. Асимптотическое разложение погранслойного решения задачи Коши в случае кратного корня вырожденного уравнения. 17
Быков А.А., Шарло А.С. Нестационарные контрастные структуры для обобщенного уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова. 18
Василевский Ю.В., Никитин К.Д., Ольшанский М.А. , Терехов К.М. Численный метод расчета течений вязкопластичных сред со свободными поверхностями. 19
Васильев Ф.П., Антипин А.С. , Артемьева Л.А. Экстрапроксимальный метод поиска точки равновесия в седловых играх двух лиц. 19
Васин А.А., Уразов А.С. Оптимальные стратегии применения пограничных средств обнаружения. 20
Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С. Механизмы подавления коррупции. 21
Вещинская В.В. Об одной задаче оптимального управления распределённой системой первого порядка. 22
Винников Е.В. Об одной модели лечения хронического миелоидного лейкоза. 23
Вржещ В.П. Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики на примере России, Украины и Финляндии. 24
Галинов А.С., Капырин И.В. Демонстрационная численная модель фильтрации для выводимого из эксплуатации промышленного уран-графитового реактора. 24
Гималдтинов И.Ф. Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста. 25

Гончаров О.И. Использование метода трансверсальных функций для решения задачи стабилизации билинейных систем. ........ 26
Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В.,Лукьянова Л.Н., Пивоварчук Д.Г. Задачи оптимизации экономических показателей процессов разработки открытых карьеров. ........ 27
Гулин А. В. Об асимптотической устойчивости нелокальных разностных схем для уравнения теплопроводности. ........ 28
Гулин А.В., Мокин А.Ю. О равномерной по параметру устойчивости семейства разностных схем с весами. ........ 29
Давыдова М.А., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных задачах реакция-диффузия-адвекция. ........ 30
Делицын А.Л., Круглов С.И., Трошина И.К. Вещественные и комплексные моды волноводов и их свойства. ........ 31
Денисов А.М. Задача определения начального условия для уравнения диффузии по дополнительной информации, представляющей собой внешний объемный потенциал. ........ 31
Дмитриев В.И. О вторых производных объемного потенциала и интегральных уравнениях электродинамики. ........ 32
Дмитриев В.И., Барашков И.С. Трёхмерное моделирование морских зондирований полем мощного горизонтального электрического диполя. ........ 33
Еремин Ю.А., Гришина Н.В. Анализ плазмонных резонансов локальных структур методом дискретных источников. ........ 34
Ершов Н.М. Имитационное моделирование с помощью Марковских систем. ........ 35
Жуковский В.И. Новое равновесие в многошаговой конфликтной задаче при неопределенности. ........ 36
Жуковский Е.С.Вольтерровы по А.Н. Тихонову накрывающие отображения ........ 36
Жуковский С.Е. Приложение условно накрывающих отображений к интегро-дифференциальным уравнениям. ........ 37
Захаров Е.В., Калинин А.В. Метод вычисления электрического поля сердца на основе решения обратной задачи электрокардиографии. ........ 38
Заячковский А.О. Экологические риски и выбор оптимального маршрута судна. ........ 39
Измаилов А.Ф., Усков Е.И. О применении Ньютоновских методов к системе условий оптимальности Ф. Джона. ........ 40
Ильинский А.С. Исследование антенных решеток из волноводов сложного поперечного сечения. ........ 41
Карамышева Т.В. Диффузионный хаос в модели реакция-диффузия для возбудимых сред. ........ 42
Киселёв Ю.Н. Теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. ........ 42
Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Исследование модели разработки газового месторождения с участием прогноза цен, изменяющихся во времени. ........ 43
Кобельков Г.М., Друца А.В. О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана. ........ 44
Корнев А.А. R задаче нелокальной стабилизации. ........ 45
Костин А.Б. Корректность одной обратной задачи с нелокальным условием наблюдения. ........ 45
Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Решение вида контрастных структур типа ступеньки для системы эллиптических уравнений с двумя типами функций переходного слоя. ........ 46
Левашова Н.Т., Петровская Е.С. Контрастная структура типа ступеньки для системы эллиптических уравнений. ........ 47
Леонов А.С. Экстраоптимальные регуляризирующие алгоритмы для решения

некорректных задач. ........................................................................................ 48
Лопушенко В.В. Моделирование рассеяния света шероховатой поверхностью на основе теории среднего поля. ................................................................................ 49
Лукьянова Л.Н. Задача терминального управления для линейной системы со смешанными ограничениями. .......................................................................... 50
Максимов В.И. Об отслеживании траектории динамической системы методом экстремального сдвига. ........................................................................................ 51
Максимова И. С. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства. ................................................................................... 52
Мальковский М.Г., Арефьев Н.В. Учет лексико-семантической информации в системе Treeton. ............................................................................................... 53
Мальковский М.Г., Старостин А.С., Арефьев Н.В. Система морфо-синтаксического анализа Treeton: аппарат тринотаций и динамическое ранжирование. ................................................................................................... 54
Миняев С.И. К вопросу об одновременной стабилизации динамических объектов с соизмеримыми запаздываниями. ..................................................................... 55
Моисеев Е.И. О нелинейной зависимости оптимального управления от начальных и финальных данных. .................................................................................. 55
Моисеев Т. Е. Об интегральном представлении решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. ................................................................... 56
Морозов В.В., Муравей Д.Л. Нижняя оценка американского альтернативного опциона на два актива. ............................................................................... 57
Намиот Д.Е. Экспертная система на базе точек доступа Wi-Fi. ............................. 58
Насонов А.В. Регуляризирующие методы суперразрешения изображений. .............. 59
Нефедов Н.Н, Левашова Н.Т., Ягремцев А.В. Решение вида КСТС в нестационарной задаче реакция-адвекция-диффузия в случае баланса адвекции. ......................................................................................................... 60
Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Стационарные фронты в интегропараболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия. ...................................................... 60
Никольский И.М. О влиянии спектра матрицы на сходимость некоторых итерационных методов решения СЛАУ. ............................................................ 61
Никольский М.С. Изучение задачи оптимального быстродействия для управляемого варианта модели А.Д.Базыкина «Хищник-Жертва». ....................... 61
Павельчак И.А., Туйкина С.Р. О численном решении обратной задачи для модифицированной модели Фитц-Хью-Нагумо. ................................................ 62
Павлова Н.Г. Необходимые условия оптимальности для задач с фазовыми ограничениями. ............................................................................................ 63
Петров И.Б. Моделирование волновых процессов в гетерогенных геологических методах сеточно-характеристическими методами. .............................................. 64
Плужникова Е.А. Один метод исследования разрешимости задач управления для дифференциальных уравнений. ........................................................................ 65
Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения задач газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. ....................................................................... 66
Поляков С.В. Моделирование процессов полевой эмиссии с поверхности наноструктур. ................................................................................................ 67
Родиченко Н.С. Моделирование и оптимизация нелинейных методов индивидуализированной молекулярной терапии онкозаболеваний. ....................... 68
Розенберг В.Л.. Задача реконструкции возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении по измерениям части фазовых координат. .............. 69
Рябков О.И. Бифуркационный анализ некоторых гидродинамических и МГД течений. ....................................................................................................... 69

Савенкова Н.П., Анпилов С.В. Двухфазная трёхмерная модель МГД-стабильности алюминиевого электролизёра. ........ 70
Самсонов С.П., Кулевский А.В. Численное решение линейной задачи быстродействия с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей........ 71
Сахарных Н.А., Пасконов В.М., Березин С.Б. Численное моделирование трехмерных течений в акватории белого моря с применением графических процессоров. ........ 71
Соловьев В.В. Разрешимость обратной задачи определения коэффициента в эллиптическом уравнении. ........ 72
Трощиев Ю.В. Монотонизация разностных схем внедрением специального оператора........ 73
Терентьев М.А. О необходимом условии существования решения одной начально-краевой задачи для уравнения КППФ с параметром. ........ 74
Терновский В.В., Хапаев М.М. Моделирование переходных режимов в задачах управления. ........ 75
Терновский В.В., Хапаев М.М. Некорректные задачи, связанные с периодическими функциями. ........ 76